

Ein kinetisches Modell der Ionen in koronalen Löchern mit Welle - Teilchen – Wechselwirkung und Coulomb – Stößen

Von der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina

zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

(Dr.rer.nat.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von Christian Vocks
aus Porz am Rhein

1. Referent:	Prof. Dr. K.-H. Glaßmeier
2. Referent:	apl. Prof. Dr. E. Marsch
eingereicht am:	20.11.2000
mündliche Prüfung (Disputation) am:	07.02.2001
Druckjahr:	2001

Vorveröffentlichungen der Dissertation

Teilergebnisse aus dieser Arbeit wurden mit Genehmigung der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät, vertreten durch den Mentor der Arbeit, in folgenden Beiträgen vorab veröffentlicht:

Tagungsbeiträge:

Vocks, C. und Marsch, E.: Nichtgleichgewichtsprozesse im koronalen Plasma – Kopplung von Wellen und Teilchen. DPG Frühjahrstagung, Bremen, 2000.

Vocks, C. und Marsch, E.: Nonequilibrium Processes in Coronal Plasma – Coupling between Particles and Waves. XXV. General Assembly of the European Geophysical Society, Nizza, 2000.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Atmosphäre der Sonne	1
1.1.1	Der vertikale Aufbau der Sonnenatmosphäre	1
1.1.2	Horizontale Struktur der Sonnenatmosphäre	3
1.2	Beobachtungen im ultravioletten Licht	5
1.3	Das Problem der Koronaheizung	8
1.4	Modellrechnungen für das koronale Plasma	9
1.4.1	Die Vorteile kinetischer Modelle	10
2	Das Modell	13
2.1	Reduzierte Verteilungsfunktionen	14
2.1.1	Die Momente der reduzierten Verteilungsfunktionen	14
2.1.2	Die Gaußsche Näherung	16
2.2	Vlasov – Gleichung für reduzierte Verteilungsfunktionen	16
2.2.1	Die stoßfreie Vlasov – Gleichung	17
2.2.2	Die Spiegelkraft	18
2.2.3	Das elektrische Feld	20
2.2.4	Vorgabe der Flußröhrengometrie	21
2.3	Quasilineare Theorie der Welle - Teilchen – Wechselwirkung	23
2.3.1	Einführung reduzierter Verteilungsfunktionen	25
2.3.2	Dispersionsrelation des Plasmas	26
2.3.3	Energiebilanz zwischen Teilchen und Wellen	30
2.4	Coulomb – Stöße	33
2.4.1	Das Landau – Stoßintegral für $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$	33
2.4.2	Coulomb – Stoßoperator für reduzierte Verteilungen	39

3	Das numerische Verfahren	43
3.1	Das Rechenfeld	43
3.1.1	Die Berechnung der Momente	46
3.1.2	Die Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial v}, \frac{\partial^2 F_k}{\partial v^2}$	47
3.1.3	Die Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial s}$	51
3.1.4	Anfangs- und Randbedingungen — Ein einfaches 1D - Flüssigkeitsmodell	53
3.2	Die Numerische Lösung der Vlasov – Gleichung	56
3.2.1	Kann Stationarität vorausgesetzt werden?	56
3.2.2	Lösung durch zeitliche Relaxation	59
4	Tests des numerischen Verfahrens	71
4.1	Coulomb – Stöße im homogenen Plasma	71
4.1.1	Verschwinden des Coulomb – Stoßoperators im thermischen Gleichgewicht	72
4.1.2	Erfüllung der Erhaltungssätze beim Relaxationsvorgang	74
4.2	Simulationsrechnungen mit einem kalten Plasma	82
4.3	Wirkung eines Temperaturgradienten	88
4.3.1	Analytische Ergebnisse nach Spitzer und Härm (1953)	89
4.3.2	Analytische Ergebnisse für reduzierte Verteilungen	93
4.3.3	Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen	93
5	Ergebnisse des kinetischen Modells	99
5.1	Geometrie des Rechenfeldes und Anfangsbedingungen	99
5.2	Modellrechnungen für die untere Korona	103
5.2.1	Simulationen für ein Protonenplasma	104
5.2.2	Simulationen mit verschiedenen Ionen: p, He ²⁺ und O ⁵⁺	115
5.3	Fortsetzung des Modells in den Sonnenwind	125
5.3.1	Modell bis $h = 4 \cdot 10^5$ km	125
5.3.2	Modell über 3 Sonnenradien	131
5.4	Koronale Modelle bis zu $1R_\odot$	141
5.4.1	Rechnung mit Protonen, He ²⁺ und O ⁵⁺	142
5.4.2	Rechnung mit Protonen, He ²⁺ und Fe ¹³⁺	145

5.4.3	Rechnung mit Protonen, He^{2+} , O^{5+} und Fe^{16+}	151
5.4.4	Zusammenfassung der Modelle bis zu $1R_{\odot}$	158
6	Zusammenfassung und Ausblick	161
6.1	Zusammenfassung	161
6.2	Ausblick	166
A	Coulomb – Stöße für reduzierte Verteilungen	167
A.1	Die Rosenbluth – Potentiale	168
A.1.1	Versuch, die Rosenbluth – Potentiale durch reduzierte Verteilungen $F_{j,k}(v_{j,\parallel})$ auszudrücken	168
A.1.2	Analytische Näherungsausdrücke für die Rosenbluth – Potentiale	169
A.2	Landau – Stoßintegral für reduzierte Verteilungen	173
A.2.1	Elimination von $\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}$ durch partielle Integration	174
A.2.2	Die Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale	176
A.2.3	Reihenentwicklungen der Summanden von L_j nach Gl. (A.27)	177
A.2.4	Anwendung des Integraloperators I_k auf das Landau – Stoßintegral	179
A.3	Die Auswertung der Reihenentwicklungen	183
A.3.1	Das Konvergenzproblem	184
A.3.2	Analytische Funktionen für die Reihen über $(-y)^n$	186
A.3.3	Die Behandlung kleiner y	192
A.4	Zusammenfassung	196
B	Symbolverzeichnis	199
	Literaturverzeichnis	203
	Danksagung	209
	Lebenslauf	211

Abbildungsverzeichnis

1.1	Höhenprofile von Temperatur und Dichte, aus Mariska (1992)	2
1.2	Verschiedene Modelle koronaler Trichter, aus Axford et al. (1999)	3
1.3	Kleinskalige Struktur des “coronal carpet”, nach Dowdy et al. (1986)	4
1.4	Aufnahme der unteren Korona der Sonne von EIT/SOHO im Licht der Fe IX/X Emissionslinien bei 171 \AA ($T = 10^6 \text{ K}$)	5
1.5	Aufnahme der Korona der Sonne von EIT/SOHO im Licht der Fe XII Emissionslinie bei 195 \AA ($T = 1.5 \cdot 10^6 \text{ K}$). Ein Ausschnitt zeigt mit Hilfe von SUMER anhand der Dopplerverschiebung der Ne VIII Linie bei 770 \AA bestimmte Driftgeschwindigkeiten entlang der Sichtlinie.	7
2.1	Die Geometrie einer Flußröhre	22
2.2	Die Geometrie eines Coulomb – Stoßes	33
3.1	Die Geometrie des Rechenfeldes	45
3.2	Die Geometrie zur Ableitung in s - Richtung	51
3.3	Verletzung der Flußerhaltung bei Verwendung von Upwind - Differenzenquotienten	52
3.4	Zur Geometrie des Versuchs, die $F_k(s_l, v_m > 0)$ ausgehend vom unteren Rand zu bestimmen.	58
4.1	Die Geometrie der Flußröhre: Radius als Funktion der Höhe	83
4.2	Strömung eines ungeheizten Protonenplasmas in eine sich aufweitende Flußröhre. Simulationszeit: $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$, Dichte am unteren Rand: $N = 10^{16} \text{ m}^{-3}$.	84
4.3	Strömung eines ungeheizten Protonenplasmas in eine sich aufweitende Flußröhre. Simulationszeit: $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$, Dichte am unteren Rand: $N = 10^{14} \text{ m}^{-3}$.	86
4.4	Strömung eines ungeheizten Protonenplasmas in eine sich aufweitende Flußröhre. Simulationszeit: $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$, Dichte am unteren Rand: $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$.	87
4.5	Auf die Maxwellverteilung normierte reduzierte Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$	94
4.6	Vergleich von $D_{0,num}(v_{\parallel})$ und $D_0(v_{\parallel})$	95

4.7	Vergleich von $D_{0,num}(v_{ })$ und $D(x = v_{ }/(\sqrt{2} v_{th}))$	96
5.1	Die Geometrie eines “koronalen Trichters”	100
5.2	Flußröhrenradius als Funktion der Ortskoordinate	101
5.3	Flußröhrenradius als Funktion der Ortskoordinate in der unteren Korona	101
5.4	Anfangs- und Randbedingungen für die Momente der reduzierten Verteilungen .	102
5.5	Anfangs- und Randbedingungen für die Momente der reduzierten Verteilungen in der unteren Korona	103
5.6	Höhenprofile für ein Protonenplasma unter Annahme eines starren Wellenspek- trums	105
5.7	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 9170 km . . .	107
5.8	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 160 960 km . .	109
5.9	Höhenprofile für ein Protonenplasma unter Annahme eines variablen Wellen- spektrums	110
5.10	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 9170 km . . .	112
5.11	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 160 960 km . .	113
5.12	Das Spektrum der Plasmawellen in der Nähe des unteren Randes des Rechenfel- des, Höhe: 1126 km	114
5.13	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 160 960 km	114
5.14	Höhenprofile für Protonen, He^{2+} und O^{5+} unter Annahme eines starren Wellen- spektrums	116
5.15	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen, des He^{2+} und des O^{5+} in einer Höhe von 1126 km	117
5.16	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen, des He^{2+} und des O^{5+} in einer Höhe von 160 960 km	119
5.17	Höhenprofile für Protonen, He^{2+} und O^{5+} unter Annahme eines variablen Wel- lenspektrums	120
5.18	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen, des He^{2+} und des O^{5+} in einer Höhe von 1126 km	121
5.19	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen, des He^{2+} und des O^{5+} in einer Höhe von 160 960 km	122
5.20	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 160 960 km	123
5.21	Höhenprofile für Protonen, He^{2+} und O^{5+} bis zu $h = 4 \cdot 10^5$ km	126
5.22	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen, des He^{2+} und des O^{5+} in einer Höhe von 307 970 km	128

5.23	Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 307 970 km.	130
5.24	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 307 970 km	131
5.25	Temperaturprofile für Protonen, He^{2+} und O^{5+} bis zu $h = 2 \cdot 10^6$ km	132
5.26	Reduzierte Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 1 015 400 km. Zusätzlich ist γ dargestellt.	134
5.27	Anwachsrate γ als Funktion der Resonanzgeschwindigkeit der O^{5+} - Ionen, normiert auf die Gyrofrequenz Ω_p und die reduzierte Verteilung F_0 der O^{5+} - Ionen.	136
5.28	Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 1 015 400 km.	137
5.29	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 1 015 400 km	138
5.30	Temperaturprofile für Protonen, He^{2+} und O^{5+} bis zu $h = 1R_{\odot}$	142
5.31	Reduzierte Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Zusätzlich ist γ , normiert auf Ω_p und F_0 , dargestellt.	143
5.32	Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 509 190 km.	145
5.33	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 509 190 km	146
5.34	Temperaturprofile für Protonen, He^{2+} und Fe^{13+} bis zu $h = 1R_{\odot}$	147
5.35	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Fe^{13+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Zusätzlich ist γ , normiert auf Ω_p und F_0 , dargestellt.	148
5.36	Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Eisens in einer Höhe von 509 190 km.	149
5.37	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 509 190 km	150
5.38	Temperaturprofile für Protonen, He^{2+} , O^{5+} und Fe^{16+} bis zu $h = 1R_{\odot}$	151
5.39	Reduzierte Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Zusätzlich ist γ , normiert auf Ω_p und F_0 , dargestellt.	153
5.40	Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 509 190 km.	154
5.41	Reduzierte Verteilungsfunktionen der Fe^{16+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Zusätzlich ist γ , normiert auf Ω_p und F_0 , dargestellt.	155
5.42	Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Eisens in einer Höhe von 509 190 km.	156
5.43	Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 509 190 km	157
A.1	Das zur Bestimmung der Rosenbluth – Potentiale verwendete Koordinatensystem	170

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines kinetischen Modells für die Ionen in der Korona der Sonne unter Berücksichtigung von Coulomb – Stößen und Welle - Teilchen – Wechselwirkung. Mit Hilfe dieses numerischen Modells können neue Einblicke in den bis heute nicht vollständig verstandenen Prozeß der Heizung der Korona und der Beschleunigung des schnellen Sonnenwinds in koronalen Löchern gewonnen werden. Mit dem im Weltraum positionierten Sonnenobservatorium SOHO konnte eine Vielzahl neuer Erkenntnisse über die Sonne im allgemeinen und die Korona im speziellen gewonnen werden. Die korrekte Wiedergabe der Beobachtungsergebnisse kann als Test des Modells auf physikalische Richtigkeit dienen.

In dieser Einleitung soll die Motivation der Arbeit und ihre Einbettung in die physikalischen Zusammenhänge erläutert werden. Dazu wird zuerst ein grober Überblick über die Struktur der Atmosphäre der Sonne sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung gegeben. Anschließend wird auf Beobachtungsverfahren zur Untersuchung des physikalischen Zustands des koronalen Plasmas eingegangen, insbesondere auf die dazu verwendeten Instrumente und die Ergebnisse der SOHO - Mission. Schließlich werden verschiedene Ansätze zur Modellierung des koronalen Plasmas vorgestellt.

1.1 Die Atmosphäre der Sonne

1.1.1 Der vertikale Aufbau der Sonnenatmosphäre

Im weißen, sichtbaren Licht erscheint die Photosphäre als Oberfläche der Sonne. Sie ist nur wenige hundert Kilometer dick, wodurch sie von der Erde aus gesehen unter einem Winkel von weniger als einer Bogensekunde erscheint, was zu dem Eindruck einer scharf begrenzten Sonnenscheibe führt. Ihr Spektrum läßt sich durch das eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von 5785 K annähern. Zusätzlich weist es jedoch “Fraunhofer – Linien” genannte Absorptionslinien von Wasserstoff, Helium und schwereren Elementen auf. In diesen Linien wird das Licht stärker absorbiert als im Kontinuum zwischen ihnen, so daß man in den Fraunhofer – Linien weniger tief in die Sonnenatmosphäre hineinblicken kann. Man sieht höhere Atmosphärenschichten als im Kontinuum. Daß die Linien vor dem Hintergrund des aus etwas tieferen Schichten stammenden Kontinuums dunkel erscheinen, ist ein Hinweis auf eine Temperaturabnahme mit der

Höhe in der Photosphäre. Spektroskopische Untersuchungen z.B. von Vernazza et al. (1973) bestätigen diesen Temperaturabfall mit der Höhe innerhalb der Photosphäre, der zu einem lokalen Minimum von etwa 4100 K führt.

Dieses Minimum definiert die Grenze zu der nächsthöheren Atmosphärenschicht, der Chromosphäre. Die Chromosphäre verdankt ihren Namen der Beobachtung eines rötlichen Saumes unmittelbar nach Beginn oder vor dem Ende der totalen Phase einer Sonnenfinsternis. In dieser Phase bedeckt der Mond die Photosphäre gerade vollständig, so daß die darüberliegende Chromosphäre sichtbar wird, bis der Mond auch sie bedeckt. Die rötliche Farbe stammt von der roten Balmer – Linie des Wasserstoffs. Wie z.B. die Modellrechnungen von Vernazza et al. (1973) zeigen, steigt die Temperatur innerhalb der Chromosphäre von dem Minimum am unteren Rand langsam mit der Höhe an.

An die Chromosphäre schließt sich die Korona der Sonne an. Bei einer totalen Sonnenfinsternis oder auf Koronographen – Aufnahmen erscheint sie sehr ausgedehnt und geht ohne scharfe Begrenzung in das interplanetare Medium über. Sie kann im weißen Licht durch Streuung photosphärischen Lichts an Staubteilchen (F - Korona) oder Elektronen (K - Korona) beobachtet werden. Besonders aufschlußreich sind jedoch Beobachtungen in Emissionslinien.

Bereits Ende des 19. Jahrhunderts stellte es sich als schwierig heraus, alle beobachteten Spektrallinien bekannten Elementen zuzuordnen, was zu der Hypothese eines unbekannten Elements "Coronium" führte. Erst später stellte es sich heraus, daß diese Linien von Fe^{13+} stammen.

In der Korona lassen sich zahlreiche hohe Ionisationsstufen schwerer Elemente nachweisen. Solch hohe Ionisationsstufen können nur bei Temperaturen der Größenordnung 10^6 K erreicht werden. Die Korona ist im Vergleich zu den darunterliegenden Atmosphärenschichten extrem heiß. Sie geht schließlich in den zuerst von Biermann (1951) vermuteten und durch Raumsonden außerhalb der Magnetosphäre der Erde direkt beobachtbaren Sonnenwind über.

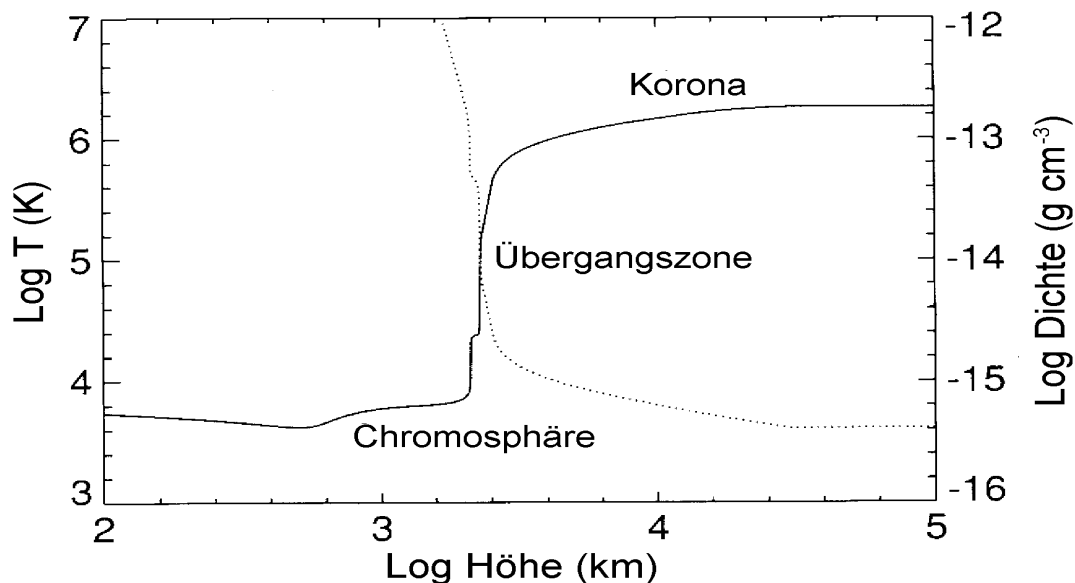


Abbildung 1.1: Höhenprofile von Temperatur und Dichte, aus Mariska (1992)

Der Übergang von der relativ kühlen Chromosphäre in die heiße Korona vollzieht sich innerhalb einer nur wenige hundert Kilometer schmalen Übergangszone. Die Abbildung 1.1 zeigt Höhenprofile von Dichte und Temperatur. Sie stammen aus Mariska (1992) und basieren in der Chromosphäre und Übergangszone auf den Rechnungen von Vernazza et al. (1981). Der scharfe Temperaturgradient in der Übergangszone fällt dabei besonders auf. Die Dichte sinkt mit der Höhe entsprechend dem Druckgleichgewicht. Auch wenn dieses Bild aus in den folgenden Abschnitten erläuterten Gründen eine starke Vereinfachung darstellt, so zeigt es doch, daß der Übergang von der Chromosphäre in die Korona auf einer sehr kleinen räumlichen Skala erfolgt.

1.1.2 Horizontale Struktur der Sonnenatmosphäre

Bisher wurde nur der Aufbau der Sonnenatmosphäre in vertikaler Richtung behandelt, und auch die Abbildung 1.1 stellt die Temperatur nur als Funktion der Höhe dar. Die Sonnenatmosphäre ist aber keineswegs radialsymmetrisch aufgebaut, es gibt eine erhebliche Strukturierung in horizontaler Richtung.

Schon bei der Beobachtung der Photosphäre im weißen Licht fällt die Granulation der Sonnenoberfläche als körnige Struktur auf. Dabei handelt es sich um die Signatur von Konvektionszellen, in denen unterhalb der Photosphäre heißes Material aufsteigt und kühleres absinkt. Bei der Beobachtung der Sonne im Licht von Spektrallinien, bei denen man nur bis in die Chromosphäre blicken und so deren Aufbau studieren kann, z.B. in Ca K, fällt die regelmäßige Struktur des "chromosphärischen Netzwerks" auf. Dieses wird durch die Grenzen der Supergranulationszellen gebildet. Bei der Supergranulation handelt es sich um ein Konvektionsmuster, dessen Zellgröße mit etwa 30.000 km deutlich größer ist als das der Granulation mit rund 1.000 km.

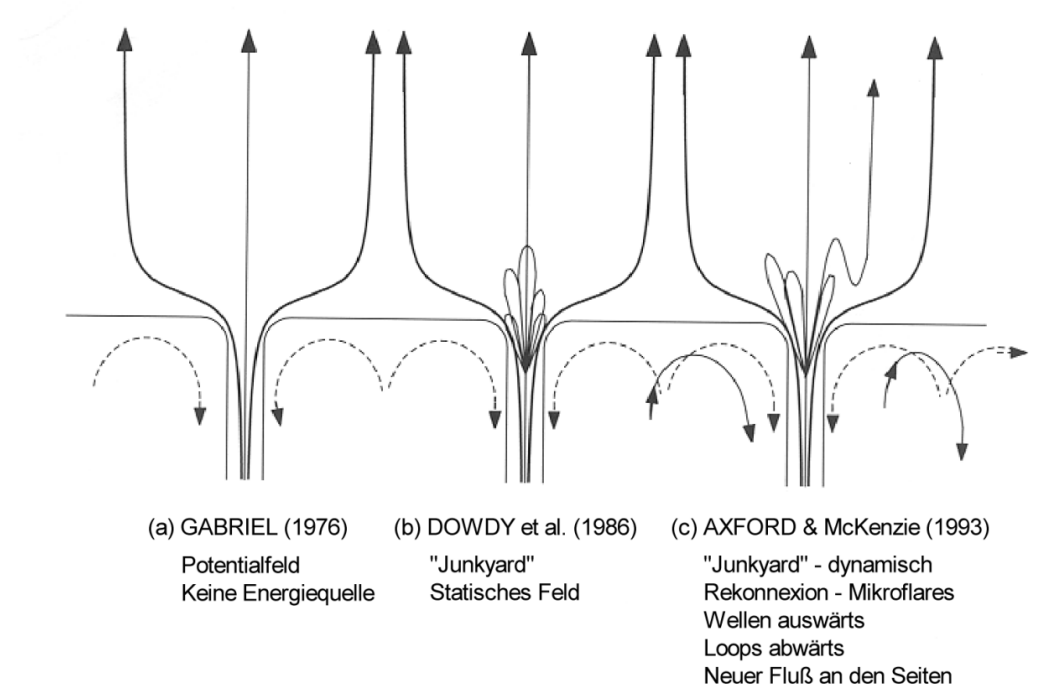


Abbildung 1.2: Verschiedene Modelle koronaler Trichter, aus Axford et al. (1999)

Magnetfelder haben einen sehr großen Einfluß auf die Struktur der Sonnenatmosphäre. Sie werden durch einen Dynamoprozeß im Innern der Sonne gebildet, und es gelangen magnetische Flußröhren an die Oberfläche. Durch die konvektive Bewegung der Supergranulationszellen wird magnetischer Fluß an die Ränder der Zellen transportiert, so daß dort ein stärkeres Magnetfeld vorliegt als im Zelleninnern.

Das Modell von Gabriel (1976) beschreibt, wie sich solche magnetische Flußröhren mit zunehmender Höhe im Bereich der Übergangszone aufweiten, da Gleichgewicht zwischen Gas- und magnetischem Druck herrschen muß und der Gasdruck mit der Höhe abnimmt. Diese Magnetfeldkonfiguration wird “koronaler Trichter” genannt. In Teil (a) der Abbildung 1.2 ist eine Skizze des koronalen Trichters dargestellt. Patsourakos et al. (1999) haben diese Aufweitung der Strukturen des chromosphärischen Netzwerks mit Hilfe von CDS auf SOHO beobachtet.

Die Atmosphäre der Sonne ist jedoch wesentlich komplizierter aufgebaut als es nach diesem einfachen Modell anzunehmen ist. Neben den von Gabriel (1976) beschriebenen offenen magnetischen Strukturen gibt es noch zahlreiche geschlossene magnetische Bögen. Dowdy et al. (1986) schließen aus der Auswertung von Magnetogrammen der Sonne auf die Existenz vieler kleinskaliger geschlossener Bögen in der Übergangszone, aus deren Zwischenräumen heraus offene Feldlinien in die Korona hinein verlaufen.

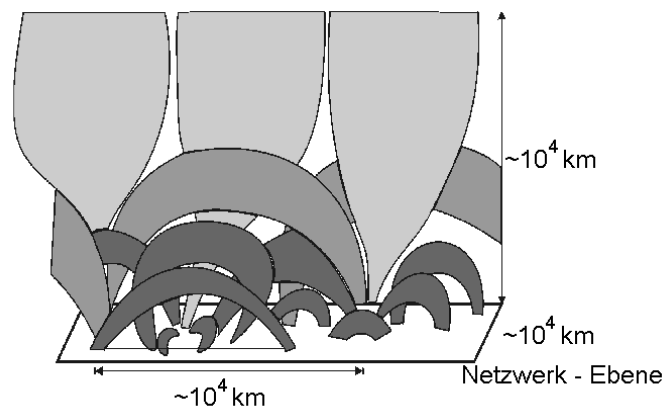


Abbildung 1.3: Kleinskalige Struktur des “coronal carpet”, nach Dowdy et al. (1986)

Die Abbildung 1.3 zeigt eine Skizze dieses “coronal carpet” oder “junkyard” nach Dowdy et al. (1986). Die kleinskaligen Bögen sind auch in Teil (b) der Abbildung 1.2 angedeutet. Die Abbildung 1.4 zeigt eine Aufnahme der unteren Korona der Sonne von EIT auf SOHO. Die zahlreichen vorhandenen kleinskaligen geschlossenen Magnetfeldbögen zu gut zu erkennen.

Durch dieses hohe Maß an Strukturierung der Sonnenatmosphäre in horizontaler Richtung sind einfache Höhenprofile wie in Abbildung 1.1 fragwürdig, da sie einer Mittelung über diese Strukturen entsprechen. Bei der Beobachtung der Sonne kann der Sehstrahl ferner mit der Höhe durch unterschiedliche Magnetfeldtopologien wie geschlossene Bögen und in die Korona hinein offene Feldlinien verlaufen, was die Analyse der Beobachtung weiter erschwert. Schließlich weist jede Beobachtung nur ein endliches räumliches Auflösungsvermögen auf, so daß die Gefahr besteht, daß die Messung über kleinskalige Strukturen hinweg mittelt, was die Auswertung wie z.B. von Doschek (1997) beschrieben erschweren kann.

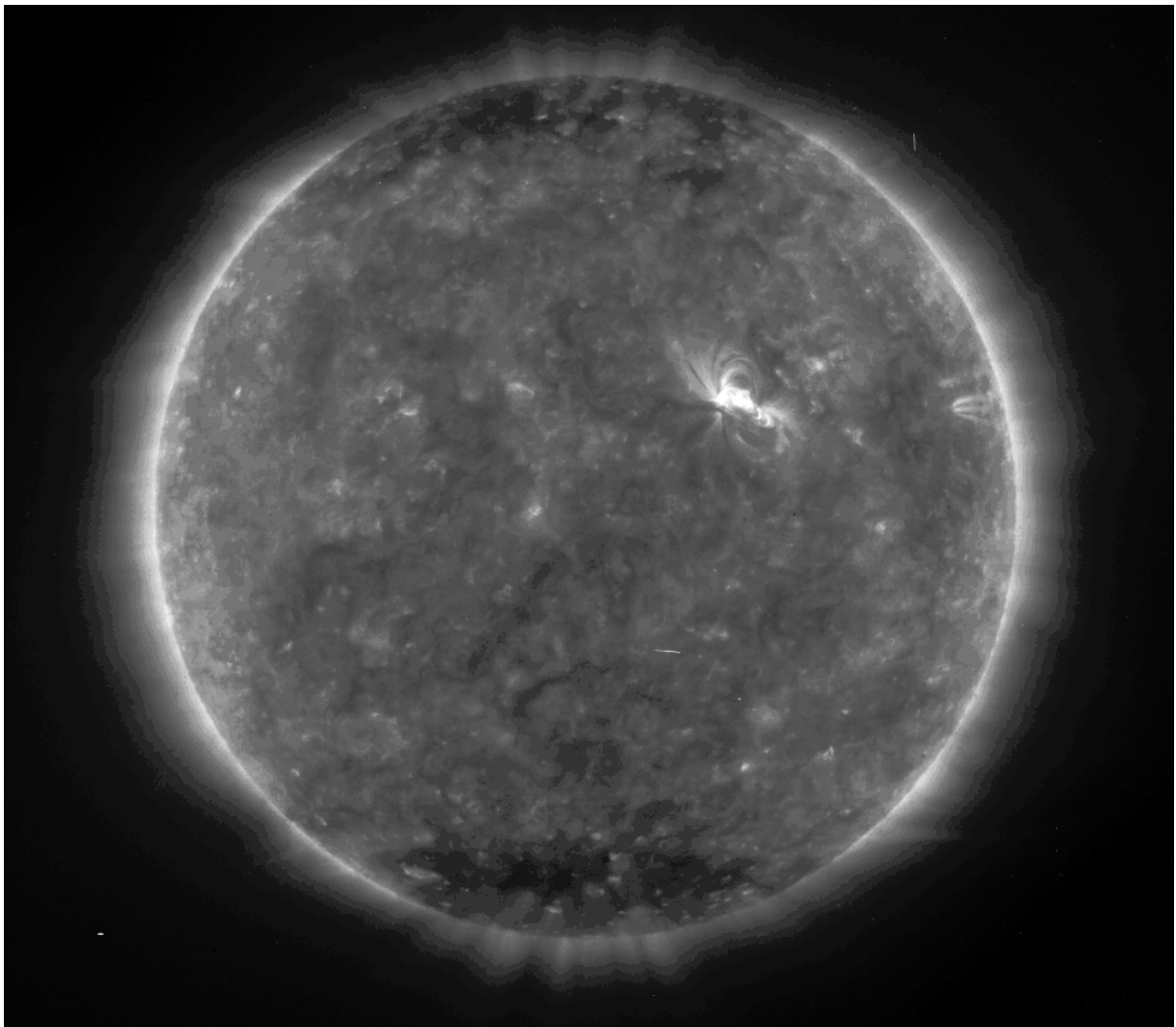


Abbildung 1.4: Aufnahme der unteren Korona der Sonne von EIT/SOHO im Licht der Fe IX/X Emissionslinien bei 171 \AA ($T = 10^6 \text{ K}$)

Neben den kleinskaligen Bögen sind in der Abbildung 1.4 auch die polaren koronalen Löcher der Sonne zu erkennen. Dabei handelt es sich um langlebige offene magnetische Strukturen, die um die Zeit des solaren Aktivitätsminimums herum auftreten und die Quellen des schnellen Sonnenwinds (vgl. Zirker (1977) und Referenzen darin) sind. Beobachtungen mit SUMER/SOHO wie die von Giordano et al. (2000) ermöglichen eine detaillierte Untersuchung der Entstehung des schnellen Sonnenwinds.

1.2 Beobachtungen im ultravioletten Licht

Zur Beobachtung der Übergangszone und Korona der Sonne bietet sich der Bereich des ultravioletten (UV) oder extremen ultravioletten (EUV, nach Mariska (1992) sind dies Wellenlängen kleiner als 1200 \AA) Lichts an. Die hohen Temperaturen in diesen Atmosphärenschichten führen zur Existenz hoher Ionisationsstufen schwerer Elemente und zur Anregung ihrer zahlreich vor-

handenen Spektrallinien im UV/EUV – Bereich. Gleichzeitig stört das photosphärische Licht nicht, da die Photosphäre mit ihrer relativ niedrigen Temperatur von 5785 K nur in völlig vernachlässigbarem Maße UV/EUV – Strahlung aussendet. In Scheffler und Elsässer (1990) wird dies dadurch verdeutlicht, daß Spektrallinien im Bereich des sichtbaren Lichts vor dem Kontinuums - Hintergrund als Absorptionslinien erkennbar sind, beim Übergang in den UV – Bereich aber als Emissionslinien erscheinen.

Da die Erdatmosphäre für EUV undurchlässig ist, kann die Sonne in diesen Wellenlängenbereichen nur vom Weltraum aus beobachtet werden. In den vergangenen Jahrzehnten geschah dies im Rahmen verschiedener Missionen (OSO, Skylab, Raketenexperimente). Eine enorme Erweiterung des Wissens über die Vorgänge in der Übergangszone und Korona der Sonne wurde durch das 1995 gestartete und im Lagrange-Punkt L1 zwischen Sonne und Erde positionierte Observatorium SOHO erreicht. SOHO trägt eine Vielzahl von Instrumenten zur kontinuierlichen Beobachtung der Sonne und zur Analyse des Sonnenwinds. In Fleck et al. (1995) sind Artikel über die einzelnen Experimente zusammengestellt. Für die Beobachtung der Übergangszone und Korona im ultravioletten Bereich sind das UV - Spektrometer SUMER (Wilhelm et al. (1995)), das EUV - Spektrometer CDS (Harrison et al. (1995)), das abbildende EUV - Teleskop EIT (Delaboudinière et al. (1995)) und der Koronograph und UV - Spektroskop UVCS (Kohl et al. (1995)) von besonderem Interesse. Mit SOHO ist daher eine gleichzeitige Beobachtung der Sonne mit unterschiedlichen Instrumenten möglich, was eine eingehende Untersuchung der Physik der Sonnenatmosphäre und ihrer Auswirkung auf den interplanetaren Raum ermöglicht.

Mit Ausnahme von EIT handelt es sich bei den genannten Instrumenten um Spektrometer, die Beobachtungsdaten bestehen aus Spektren der UV - Emission der Übergangszone und Korona. Um die physikalischen Bedingungen wie Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur dort zu untersuchen, ist eine Analyse dieser Spektren notwendig.

Schon aus der Existenz bestimmter Spektrallinien und damit Ionisationsstufen können Rückschlüsse auf die (Elektronen-) Temperatur gezogen werden, da die relativen Häufigkeiten von Ionisationsstufen wie in Shull und van Steenberg (1982b), Shull und van Steenberg (1982a) tabelliert von der Temperatur abhängen. Diese Tabellen geben Werte für die Ionisation im thermischen Gleichgewicht an.

Die Breite von Spektrallinien kann aufgrund der thermischen Bewegung der Ionen durch den Doppler – Effekt vergrößert werden, so daß Linienbreiten zur Bestimmung der Iontemperatur herangezogen werden können. Dabei ist zu beachten, daß turbulente Bewegungen auf räumlichen Skalen unterhalb des instrumentellen Auflösungsvermögens ebenfalls zu einer Linienverbreiterung führen. In Marsch et al. (1999) und Tu et al. (1998) werden diese beiden Effekte durch die Analyse der Linien verschiedener Elemente getrennt und so die Iontemperaturen berechnet.

Mit Hilfe des Doppler – Effekts ist es ferner möglich, aus der Verschiebung einer Linie im Spektrum die Geschwindigkeitskomponente der emittierenden Ionen in Blickrichtung zu bestimmen. Wenn die Emission von koronalen Linien nicht auf Stoßanregung, sondern auf resonanter Streuung von Licht aus tieferen Schichten der Sonnenatmosphäre beruht, dann erlaubt das in Beckers und Chapman (1974) beschriebene “Doppler – dimming” sogar eine Bestimmung des Betrags der Geschwindigkeit.

Die Abbildung 1.5 zeigt von Hassler et al. (1999) mit SUMER auf SOHO beobachtete Driftge-

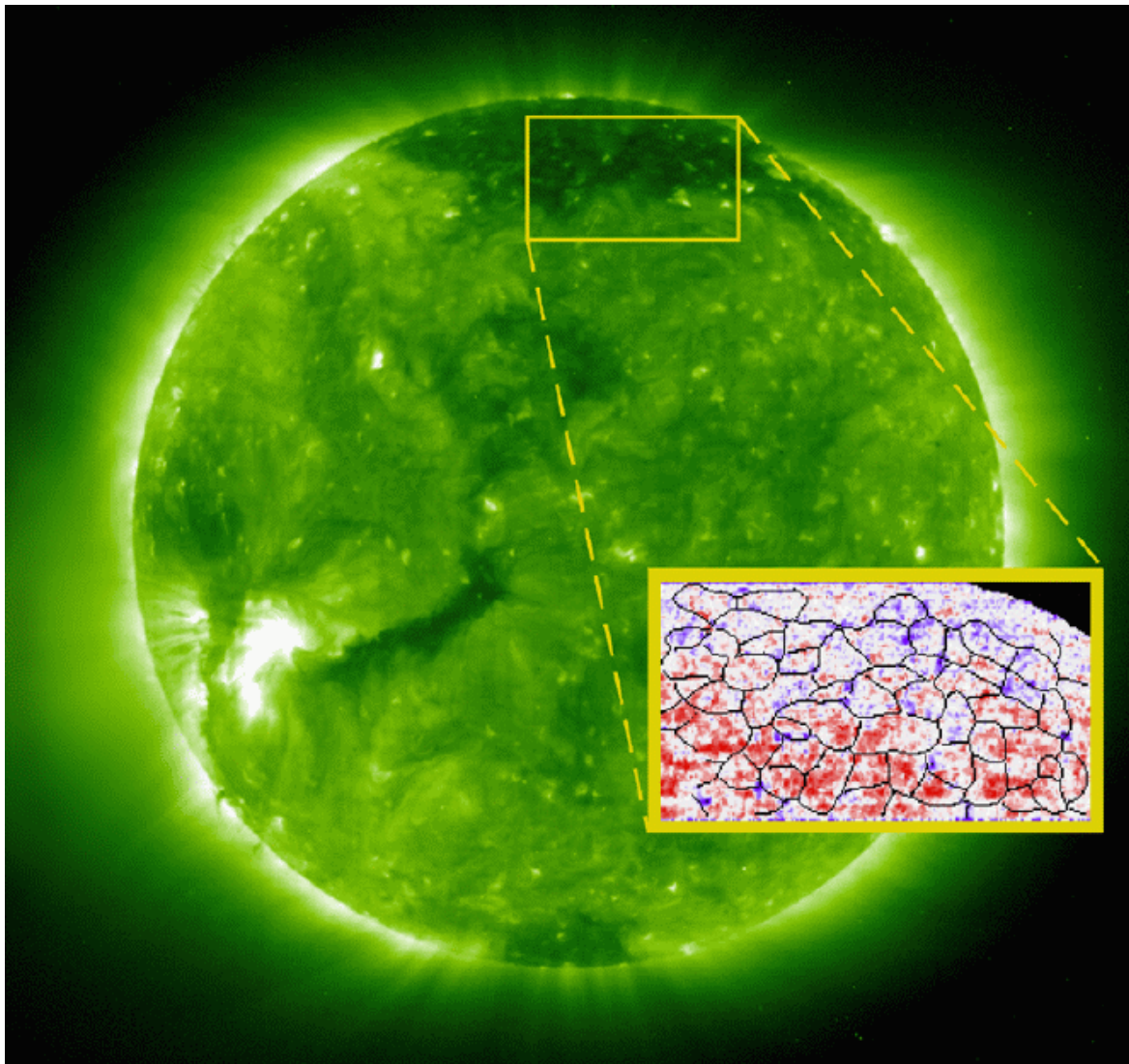


Abbildung 1.5: Aufnahme der Korona der Sonne von EIT/SOHO im Licht der Fe XII Emissionslinie bei 195 \AA ($T = 1.5 \cdot 10^6 \text{ K}$). Der Ausschnitt zeigt mit Hilfe von SUMER anhand der Dopplerverschiebung der Ne VIII Linie bei 770 \AA bestimmte Driftgeschwindigkeiten entlang der Sichtlinie. Blau deutet eine Bewegung in Richtung des Beobachters an, Rot von ihm weg. Zusätzlich ist das chromosphärische Netzwerk angedeutet. Nach Hassler et al. (1999).

schwindigkeiten in einem polaren koronalen Loch. Es ist ein deutlicher Zusammenhang zwischen den Quellen des schnellen Sonnenwinds und den Grenzen des chromosphärischen Netzwerks zu erkennen. Dies deutet auf einen Ursprung des schnellen Sonnenwinds in den koronalen Trichtern nach Abbildung 1.2 hin.

Schließlich können verschiedene Spektrallinien auf unterschiedlichen Anregungsmechanismen basieren, so daß ihre Intensitäten in unterschiedlicher Weise von der Elektronendichte abhängen. Darauf basierend werden in Mariska (1992) aus Linienverhältnissen Elektronendichten berechnet.

Diese Methoden zur Interpretation von Spektren erfordern Annahmen über den Zustand des

beobachteten Plasmas. Meist wird von einem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (local thermodynamic equilibrium, LTE) mit Ionisationsgleichgewicht und Maxwellverteilungen gleicher Temperatur für Elektronen und Ionen ausgegangen.

Vor diesem Hintergrund erscheint ein Temperaturprofil wie in Abbildung 1.1 mit einem extremen Anstieg in der Übergangszone problematisch. In einem solchen Temperaturgradienten gibt es schon aufgrund der Wärmeleitung Abweichungen der Teilchenverteilungen von Maxwellverteilungen. Auch können verschiedene Teilchensorten unterschiedliche Temperaturen aufweisen. Wenn das Plasma durch einen solchen Temperaturgradienten strömt, können von Kneer (1980) und Ko et al. (1997) untersuchte Abweichungen vom Ionisationsgleichgewicht auftreten. Shoub (1983) und Esser und Edgar (2000) stellten fest, daß Abweichungen der Elektronenverteilung von einer Maxwellverteilung ebenfalls Auswirkungen auf die Häufigkeit verschiedener Ionisationsstufen eines Elements haben. Sparado et al. (1994) diskutierten den Einfluß von Nichtgleichgewichtsionisation auf Linienverhältnisse. Sparado et al. (1995) untersuchten die Strömung in einem geschlossenen magnetischem Bogen und kam zu dem Schluß, daß die Strömung durch den Temperaturgradienten nicht die alleinige Erklärung für die beobachteten Linienverhältnisse sein kann. Bei der Analyse von SUMER - Daten stellten Doschek et al. (1997) und Judge et al. (1997) mit der Annahme eines LTE verbundene Diskrepanzen zwischen Temperaturmessungen durch Ionisationsverhältnisse und durch Linienverhältnisse und damit Hinweise auf Nichtgleichgewichtszustände fest.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß ein einfaches Temperaturprofil wie in Abbildung 1.1 im Bereich der Übergangszone und Korona der Sonne eine zu starke Vereinfachung darstellt. Zum einen werden kleinskalige Strukturen und unterschiedliche Magnetfeldgeometrien nicht berücksichtigt, zum anderen spielen Abweichungen von Stoßgleichgewicht eine große Rolle, so daß es problematisch ist, von einer einheitlichen "Temperatur" für die Verteilungsfunktionen der verschiedenen Teilchensorten sowie von Ionisationszuständen zu sprechen. Dieses Nichtgleichgewicht beeinflußt die Analyse von UV/EUV – Beobachtungen durch nicht-Maxwellsche Verteilungsfunktionen und Abweichungen vom Ionisationsgleichgewicht. Zur Beschreibung der physikalischen Prozesse in so einem Plasma sind daher Parameter wie Dichte und Temperatur alleine nicht ausreichend, es werden detailliertere Informationen über die Verteilungsfunktionen benötigt.

1.3 Das Problem der Koronaheizung

Während die Photosphäre in guter Näherung durch einen schwarzen Strahler von 5785 K beschrieben werden kann, steigt die Temperatur in der Korona bis auf Werte der Ordnung 10^6 K an. Dies wirft die Frage auf, woher die freie Energie für den Temperaturanstieg kommt. Durch welchen Prozeß wird die Korona geheizt?

Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, kann in Beobachtungen der Korona durch SOHO nach Signaturen des Heizungsprozesses gesucht werden. So stellt Kohl et al. (1998) in einem koronalen Loch für schwere Ionen wie O^{5+} eine bevorzugte Heizung, starke Temperaturanisotropien mit $T_{\perp} > T_{\parallel}$ sowie eine gegenüber den Protonen erhöhte Geschwindigkeit fest. Diese Beobachtungen stützen die These, daß die Heizung der Korona durch resonante Absorption von Ionenzyklotronwellen erfolgt (Cranmer et al. (1999), Marsch et al. (1999)). Axford und

McKenzie (1991), Axford et al. (1999) und Ruzmaikin und Berger (1998) schlagen als Erzeugungsmechanismus für die Wellen Rekonnexionsprozesse an kleinskaligen Flußröhren vor. Dieser Mechanismus ist in Teil (c) der Abbildung 1.2 dargestellt. In einem koronalen Loch breiten sich die Wellen dann von der Sonnenoberfläche weg nach außen hin aus, wodurch Energie in die Korona hinein transportiert wird. Die dort vorhandenen Ionen können mit Wellen, deren Frequenzen im Bereich ihrer Gyrofrequenzen liegen, in Wechselwirkung treten und die Wellenenergie absorbieren. Da das Magnetfeld in einem koronalen Loch mit der Höhe abnimmt, sinken auch die Gyrofrequenzen, so daß in einer bestimmten Höhe gerade die Ionen mit den niedrigsten Gyrofrequenzen noch unverbrauchte Wellenenergie vorfinden und so bevorzugt geheizt werden. Dieser Prozeß des “frequency sweeping” wird in Marsch und Tu (1997) beschrieben. Die Entwicklung des Spektrums setzt sich auch im Sonnenwind fort. In Tu und Marsch (1995) wird die Veränderung des Spektrums im Sonnenwind mit zunehmender Distanz von der Sonne diskutiert. Dabei wird festgestellt, daß das Spektrum bei höheren Frequenzen, die aber kleiner als die Protonengyrofrequenz sind, mit wachsendem Sonnenabstand erniedrigte Werte aufweist.

1.4 Modellrechnungen für das koronale Plasma

Da die Prozesse in der Korona nicht direkt vor Ort beobachtbar sind, sondern nur indirekt über ihre Auswirkungen auf die Emission von Licht oder auf die Eigenschaften des abströmenden Sonnenwinds, sind theoretische Modellrechnungen dabei hilfreich, sich ein physikalisches Bild von diesen Prozessen zu machen. Dabei wird stets eine Erklärung der Beobachtungen durch die Modellvorstellungen angestrebt.

Die dabei verwendeten Plasmamodelle lassen sich grob in zwei Kategorien einteilen: Flüssigkeitsmodelle und kinetische Modelle. Kinetische Modelle beschreiben nicht nur die Verteilung der Teilchen im Ortsraum, sondern geben auch eine Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum an. Damit erlauben sie eine detaillierte Beschreibung des physikalischen Zustands des Plasmas. Flüssigkeitsmodelle dagegen behandeln nur die durch Integration über den Geschwindigkeitsraum gewonnenen Momente der Verteilungsfunktionen, wie die Dichten, mittleren Geschwindigkeiten und Temperaturen der verschiedenen Teilchensorten. Durch den Wegfall der Geschwindigkeitskoordinate haben sie den Vorteil größerer mathematischer Einfachheit und eines damit verbundenen geringeren Rechenaufwands bei numerischen Simulationen.

Bei Flüssigkeitsmodellen tritt jedoch das Problem des Abschlusses der Gleichungen auf: Die Kontinuitätsgleichung für die Dichte hängt von der Geschwindigkeit ab, die Impulsgleichung für die Geschwindigkeit von der Temperatur, die Energiegleichung wiederum vom Wärmestrom usw.. Diese Folge von Gleichungen muß abgeschlossen werden, z.B. durch das klassische $T^{5/2}$ - Gesetz der Wärmeleitfähigkeit (Spitzer (1962)) und das Fouriergesetz der Wärmeleitung.

Dieser Abschluß ist aber nicht allgemein gültig, sondern nur für ein Plasma mit Verteilungsfunktionen, die sich geringfügig von Maxwellschen unterscheiden, d.h. für ein Plasma, das sich fast im thermischen Gleichgewicht befindet. Auch die Behandlung des koronalen Heizungsprozesses basiert in vielen Modellrechnungen auf Annahmen. Bei Hu et al. (1997) oder Hansteen und Leer (1995) wird er einfach als Quellterm in der Energiegleichung vorgegeben, bei Marsch (1999) wird er nach der quasilinearen Theorie berechnet. Die so gewonnenen Heizungsterme basieren auf der Annahme von Bi-Maxwellverteilungen. Bei Hu et al. (2000) wird zusätzlich

der Impuls- und Energieaustausch durch Coulomb – Stöße zwischen verschiedenen Ionensorten berechnet, wobei ebenfalls die Annahme von Maxwellverteilungen zugrundeliegt.

In der Übergangszone und Korona der Sonne kann das Plasma jedoch weit vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt sein, dementsprechend können die Verteilungsfunktionen der Ionen von Maxwellverteilungen abweichen. Shoub (1987) stellte fest, daß Abweichungen von einer Maxwellverteilung die Ergebnisse von Modellrechnungen beeinflussen können. Vergleiche zwischen kinetischen und Flüssigkeitsmodellen werden ferner in Huba (1991) und Leer et al. (1996) durchgeführt. Für Plasmen, die nicht weit vom Gleichgewichtszustand entfernt sind, liefern die Flüssigkeitsmodelle noch gute Ergebnisse.

1.4.1 Die Vorteile kinetischer Modelle

Kinetische Modelle sind nicht an Annahmen bestimmter Verteilungsfunktionen gebunden, sondern erlauben eine Beschreibung der Teilchenverteilung im Orts- und Geschwindigkeitsraum. Sie berücksichtigen die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Wirkung von Plasmawellen und Coulomb – Stößen auf die Teilchen. Mit ihnen können Nichtgleichgewichtszustände beschrieben und die Prozesse der Koronaheizung und der Beschleunigung des Sonnenwinds wesentlich detaillierter untersucht werden, als es mit den auf die Momente der Verteilungsfunktionen beschränkten Flüssigkeitsmodellen möglich ist.

Kinetische Effekte spielen in der Korona eine wichtige Rolle. So handelt es sich bei der von Scudder (1992a) und Scudder (1992b) vorgeschlagenen “Geschwindigkeitsfiltration” um einen Vorgang, bei dem nicht-Maxwellsche Verteilungsfunktionen mit hochenergetischen Ausläufern in der Chromosphäre zu einem starken Temperaturanstieg mit zunehmender Höhe führen. Die Rechnungen werden für Elektronen durchgeführt und erreichen koronale Temperaturen von 10^6 K. Dabei ist es nicht notwendig, die Elektronen in der Korona zu heizen. Mit einem Flüssigkeitsmodell kann dies nicht beschrieben werden, eine Temperaturerhöhung findet dann nur am Ort der Dissipation freier Energie statt.

Auch Anderson (1994) führte Rechnungen mit der Geschwindigkeitsfiltration durch und kam zu dem Schluß, daß die Coulomb – Stöße hierbei nicht vernachlässigbar sind. In Anderson et al. (1996) werden die Ergebnisse eines stoßfreien Modells mit Skylab - Daten verglichen und sowohl Übereinstimmungen als auch auf die starken Vereinfachungen zurückgeführte Abweichungen festgestellt.

Weitere Beispiele für kinetische Rechnungen sind die von Lie-Svendsen et al. (1997), bei denen eine Elektronenverteilung als Testteilchenpopulation vor einem gegebenen Plasmahintergrund berechnet wurde und so typische, von Helios gemessene Verteilungsfunktionen im Sonnenwind reproduziert werden konnten.

Diese kinetischen Modelle beschreiben nur die Verteilungsfunktionen der Elektronen. Um Informationen über den Heizungsprozeß des koronalen Plasmas zu gewinnen, ist es jedoch notwendig, die Verteilungen der Ionen zu untersuchen. Livi und Marsch (1987) berechneten die Entwicklung der Verteilungsfunktionen von Protonen in Sonnenwind unter Berücksichtigung von Coulomb – Stößen. Tam und Chang (1999) führten ebenfalls im Sonnenwind Hybridsimulationen mit Protonen und Alpha - Teilchen als Ionensorten durch. Sie konnten unter Berücksichtigung von Welle - Teilchen – Wechselwirkung, Coulomb – Stößen und ambipolarem elektrischen Feld

Temperaturanisotropien, unterschiedliche Driftgeschwindigkeiten der Ionensorten und bevorzugte Heizung des Heliums feststellen.

Durch die Verwendung der kinetischen Theorie lassen sich gegenüber Flüssigkeitsmodellen wesentliche neue Erkenntnisse über die physikalischen Vorgänge in der Korona gewinnen, die den erhöhten Rechenaufwand mehr als rechtfertigen. Die wesentlichen Vorteile eines kinetischen Modells für die Ionen lassen sich in folgenden Stichpunkten zusammenfassen:

- Es werden keine Annahmen über die Form der Verteilungsfunktionen der Ionen gemacht.
- Weit vom thermischen Gleichgewicht entfernte Zustände sind beschreibbar.
- Der Heizungsprozeß wird durch Berechnung seiner Wirkung auf die Verteilungsfunktionen untersucht. Dadurch wird seine Abhängigkeit von den Teilchengeschwindigkeiten berücksichtigt.
- Deformationen der Verteilungsfunktionen durch den Heizungsprozeß werden ebenso berücksichtigt wie die Tendenz der Coulomb – Stöße, Maxwellverteilungen zu erhalten.
- Insgesamt liegt damit eine mikroskopische Beschreibung der koronalen Plasmaprozesse vor, die mit Flüssigkeitsmodellen nicht zu erreichen ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines kinetischen Modells für verschiedene Ionensorten in der Korona, wobei die Welle - Teilchen – Wechselwirkung, die Coulomb – Stöße, die durch die Magnetfeldtopologie definierte Geometrie sowie das elektrische und das Gravitationsfeld berücksichtigt werden sollen. Aufgrund ihrer erheblich kürzeren Zeitskalen werden Elektronen nur als neutralisierendes Fluid betrachtet. Durch das Studium der Entwicklung der Verteilungsfunktionen unter dem Einfluß der Plasmawellen kann die Heizung der Ionen und ihre Beschleunigung durch den Wellendruck, der nach Jacques (1978) eine wichtige Rolle bei der Entwicklung des Sonnenwinds spielt, detailliert untersucht und die Ergebnisse mit den SOHO - Beobachtungen verglichen werden.

Kapitel 2

Das Modell

Die Entwicklung eines kinetischen Modells für die Ionen in der Sonnenkorona entspricht der Berechnung der Verteilungsfunktionen $f_j(\vec{r}, \vec{v}, t)$ der verschiedenen Ionensorten j . Dabei kann der mathematische und numerische Aufwand Vereinfachungen notwendig machen. In diesem Abschnitt werden “reduzierte Verteilungsfunktionen” $F_{j,k}(s, v_{\parallel}, t)$ eingeführt und ausgehend von der bekannten Vlasov – Gleichung für die Verteilungsfunktionen $f_j(\vec{r}, \vec{v}, t)$ Gleichungen für die $F_{j,k}$ hergeleitet, die die zeitliche Entwicklung in der Sonnenkorona unter der Heizung durch Welle - Teilchen – Wechselwirkung und der relaxierenden Wirkung der Coulomb – Stöße beschreiben. Im nächsten Kapitel wird dann ein numerisches Verfahren zur Lösung dieser Gleichungen vorgestellt.

Ausgangspunkt ist die Vlasov – Gleichung für Verteilungsfunktionen $f_j(\vec{r}, \vec{v}, t)$:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_j + \left(\vec{g} + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot \nabla_v f_j = \left(\frac{\delta f_j}{\delta t} \right)_{W.-T.} + \left(\frac{\delta f_j}{\delta t} \right)_{Coul.} \quad (2.1)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Welle - Teilchen – Wechselwirkung, die nach der quasilinearen Theorie berechnet wird. Der zweite Term symbolisiert die Coulomb – Stöße, die unter Verwendung des Landau – Stoßintegrals ausgewertet werden.

Aufgrund ihrer Komplexität ist die Gleichung (2.1) nicht analytisch zu lösen, eine numerische Lösung ist notwendig. Hierbei tritt das Problem auf, daß die Verteilungen $f_j(\vec{r}, \vec{v}, t)$ Funktionen von je 3 räumlichen und 3 Geschwindigkeitskoordinaten sind, zusammen mit der Zeit t sind die f_j 7-dimensional. Eine numerische Lösung einer 7-dimensionalen Gleichung (2.1) ist aber aufgrund des damit verbundenen Rechenaufwands nicht machbar.

Aus diesem Grund ist die Entwicklung eines Modells für die sich über den vollen Phasenraum (\vec{r}, \vec{v}) erstreckenden Verteilungen f_j nicht möglich, es müssen Vereinfachungen eingeführt werden, die die Zahl der Dimensionen reduzieren.

Protonen haben bei einer Temperatur von 10^6 K eine thermische Geschwindigkeit von ca. $v_{th} = 100$ km/s. Ein aus der Korona stammendes schnelles Proton mit einer Geschwindigkeit von einigen v_{th} benötigt daher eine Transitzeit der Größenordnung 1 s, um die wenige hundert Kilometer schmale Übergangszone zu durchqueren. Andere typische Längen wie die Ausdehnung von Supergranulationszellen (30.000 km) oder Druckskalenhöhen ($\frac{kT}{mg} = 300$ km für Protonen

in der oberen Chromosphäre bei $T = 10.000 \text{ K}$), und damit auch die Transitzeiten, sind ebenfalls nicht kleiner. Demgegenüber weisen Protonen in der unteren Korona Gyroperioden von 10^{-4} s und weniger auf. Die Gyroperioden sind daher klein gegenüber den Transitzeiten durch charakteristische Längenskalen.

Dies rechtfertigt die Annahme gyrotroper Verteilungsfunktionen. Dadurch reduziert sich die Zahl der Geschwindigkeitskoordinaten von 3 auf 2:

$$\vec{v} \longrightarrow (v_{\parallel}, v_{\perp})$$

2.1 Reduzierte Verteilungsfunktionen

Eine Gesamtzahl der Dimensionen von 6 in der Vlasov – Gleichung (2.1) ist aber immer noch zu hoch, weitere Vereinfachungen sind notwendig. Nach Marsch (1998) können durch Integration über die Geschwindigkeitskoordinate v_{\perp} senkrecht zum Magnetfeld, gewichtet mit Potenzen von v_{\perp}^2 , “reduzierte Verteilungsfunktionen” $F_{j,k}(v_{\parallel})$ definiert werden:

$$F_{j,k}(v_{\parallel}) = 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp}^{2k+1} f_j(v_{\parallel}, v_{\perp}) dv_{\perp} \quad k \in \mathbf{N} \quad (2.2)$$

Die reduzierten Verteilungsfunktionen hängen nur noch von der Geschwindigkeitskomponente v_{\parallel} in Magnetfeldrichtung ab. Der Vorfaktor 2π stammt aus der aufgrund der Gyrotropie trivialen Integration über alle Gyrationenwinkel. Bei der Definition der reduzierten Verteilungsfunktionen wird darauf verzichtet, die Gewichte v_{\perp}^{2k} auf eine charakteristische Geschwindigkeit wie die Alfvéngeschwindigkeit oder die thermische Geschwindigkeit zu normieren. Da solche Normierungskonstanten räumlich und zeitlich variabel sind, würden ihre entsprechenden Ableitungen in die gesuchte Vlasov – Gleichung für die $F_{j,k}$ eingehen, was deren Struktur verkompliziert und numerische Probleme verursachen kann.

2.1.1 Die Momente der reduzierten Verteilungsfunktionen

Die Berechnung von Plasmaeigenschaften wie der Alfvéngeschwindigkeit und der Vergleich der Ergebnisse des kinetischen Modells mit Flüssigkeitsmodellen erfordert die Bestimmung makroskopischer Größen wie Dichte, Driftgeschwindigkeit und Temperatur aus den Verteilungsfunktionen. Diese Größen lassen sich durch Integration (Momentenbildung) der Verteilungsfunktionen über den Geschwindigkeitsraum bestimmen.

Durch einfaches Einsetzen der Integration (2.2) in die Definitionen der Momente einer Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ lassen sich die Momente durch die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ ausdrücken. Auf den Index j für die verschiedenen Ionensorten kann verzichtet werden, solange keine Wechselwirkung zwischen ihnen betrachtet wird. Die folgenden Beziehungen und die im nächsten Abschnitt hergeleitete Vlasov – Gleichung gelten für alle j gleichermaßen.

Unter Berücksichtigung der Gyrotropie gilt für die Integration einer beliebigen Funktion $x(\vec{v}) = x(v_{\parallel}, v_{\perp})$ über den gesamten Geschwindigkeitsraum:

$$\int x(\vec{v}) d^3\vec{v} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp} x(v_{\parallel}, v_{\perp}) dv_{\perp} \quad (2.3)$$

Für die Dichte N ergibt sich damit sofort:

$$N = \int f(\vec{v}) d^3\vec{v} = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \quad (2.4)$$

Aufgrund der Gyrotropie hat die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D keine Komponente senkrecht zum Magnetfeld. Für ihre parallele Komponente v_D gilt:

$$v_D = \frac{1}{N} \int v_{\parallel} f(\vec{v}) d^3\vec{v} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} F_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \quad (2.5)$$

Für die thermischen Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$V_{\parallel}^2 = \frac{1}{N} \int (v_{\parallel} - v_D)^2 f(\vec{v}) d^3\vec{v} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} (v_{\parallel} - v_D)^2 F_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \quad (2.6)$$

$$V_{\perp}^2 = \frac{1}{2N} \int v_{\perp}^2 f(\vec{v}) d^3\vec{v} = \frac{1}{2N} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \quad (2.7)$$

Der Ausdruck (2.6) für die parallele thermische Geschwindigkeit V_{\parallel} kann mit $(v_{\parallel} - v_D)^2 = v_{\parallel}^2 - 2v_D v_{\parallel} + v_D^2$ und den Definitionen (2.4) und (2.5) umgeformt werden:

$$V_{\parallel}^2 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel}^2 F_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel} - v_D^2 \quad (2.8)$$

Eine isotrope thermische Geschwindigkeit v_{th} kann durch $v_{th}^2 = \frac{1}{3N} \int (|\vec{v} - \vec{v}_D|)^2 f(\vec{v}) d^3\vec{v}$ berechnet werden. Mit $(|\vec{v} - \vec{v}_D|)^2 = (v_{\parallel} - v_D)^2 + v_{\perp}^2$ folgt:

$$v_{th}^2 = \frac{1}{3N} \int_{-\infty}^{\infty} (v_{\parallel} - v_D)^2 F_0(v_{\parallel}) + F_1(v_{\parallel}) dv_{\parallel} = \frac{1}{3} (V_{\parallel}^2 + 2V_{\perp}^2) \quad (2.9)$$

Für den Wärmestrom \vec{q} gilt schließlich:

$$\vec{q} = \frac{m}{2} \int (\vec{v} - \vec{v}_D) (|\vec{v} - \vec{v}_D|)^2 f(\vec{v}) d^3\vec{v} \quad (2.10)$$

Auch beim Wärmestrom gibt es aufgrund der Gyrotropie nur eine Komponente $q = q_{\parallel}$ in Magnetfeldrichtung. Mit $(|\vec{v} - \vec{v}_D|)^2 = (v_{\parallel} - v_D)^2 + v_{\perp}^2$ folgt:

$$q = \frac{m}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (v_{\parallel} - v_D)^3 F_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel} + \int_{-\infty}^{\infty} (v_{\parallel} - v_D) F_1(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \right) \quad (2.11)$$

Mit $(v_{\parallel} - v_D)^3 = v_{\parallel}^3 - 3v_{\parallel}^2 v_D + 3v_{\parallel} v_D^2 - v_D^3$, den Gleichungen (2.4) – (2.7) und der Umformung (2.8) ergibt sich:

$$q = \frac{m}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel}^3 F_0(v_{\parallel}) + v_{\parallel} F_1(v_{\parallel}) dv_{\parallel} - N \cdot (v_D^3 + 3v_D V_{\parallel}^2 + 2v_D V_{\perp}^2) \right) \quad (2.12)$$

Zur Auswertung der im folgenden Abschnitt hergeleiteten Vlasov – Gleichung für die reduzierten Verteilungsfunktionen F_k genügen bereits die Momente N , v_D , V_{\parallel}^2 und V_{\perp}^2 . Der Wärmestrom ist zur Kontrolle der Energieerhaltung hilfreich. Die Berechnung noch höherer Momente erscheint nicht sinnvoll.

Es ist bemerkenswert, daß sich die in den Gleichungen (2.4) – (2.12) definierten Momente nur mit Hilfe der beiden reduzierten Verteilungen niedrigster Ordnung F_0 und F_1 bestimmen lassen. Aus diesem Grund ist es nicht notwendig, eine Vlasov – Gleichung für F_k höherer Ordnung aufzustellen und zu lösen.

2.1.2 Die Gaußsche Näherung

Bei der Herleitung der Vlasov – Gleichung für die reduzierten Verteilungsfunktionen F_k stellt sich heraus, daß die Gleichung für F_k auch von der nächsthöheren Ordnung F_{k+1} abhängt. Die Auswertung der Coulomb – Stöße führt sogar auf Reihenentwicklungen über F_{k+n} , $n \in \mathbf{N}$. Die Lösung der Gleichung für F_0 und F_1 erfordert daher auch Informationen über F_2 , F_3 , usw.. Es tritt das Problem des Abschlusses der Reihe der F_k auf.

Dieser Abschluß kann nach Marsch (1998) durch die “Gaußsche Näherung” erfolgen. Bei dieser Näherung wird angenommen, daß die Abhängigkeit der Verteilung $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ von v_{\perp} einer Maxwellverteilung $\propto \exp(-\frac{v_{\perp}^2}{2V_{\perp}^2})$ mit der senkrechten thermischen Geschwindigkeit V_{\perp} entspricht. Dadurch ergibt sich:

$$F_k(v_{\parallel}) = k! (2V_{\perp}^2)^k F_0(v_{\parallel}) \quad (2.13)$$

Die F_k höherer Ordnung können auch durch F_1 ausgedrückt werden:

$$F_k(v_{\parallel}) = k! (2V_{\perp}^2)^{k-1} F_1(v_{\parallel}) \quad (2.14)$$

Wenn die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion f von v_{\perp} wirklich Maxwellisch ist, wie es z.B. bei einer Bi-Maxwellverteilung der Fall ist, dann gilt die Gaußsche Näherung exakt.

Die reduzierten Verteilungsfunktionen F_0 und F_1 sind nicht nur mathematische Hilfsgrößen nach Gl. (2.2), sondern haben auch eine physikalische Bedeutung. F_0 wird einfach durch Integration von $f(\vec{v})$ über die senkrechten Geschwindigkeitskomponenten berechnet und ist eine Verteilungsfunktion über v_{\parallel} mit einer Normierung nach Gl. (2.4). Mit ihrer Hilfe kann nach (2.5) die Driftgeschwindigkeit v_D und nach (2.8) die parallele thermische Geschwindigkeit V_{\parallel} bestimmt werden.

Die reduzierte Verteilung F_1 dagegen ist nach (2.7) eng mit der senkrechten thermischen Geschwindigkeit V_{\perp} verbunden. Dies ist eine Folge des Gewichtes v_{\perp}^2 in der Definition (2.2) von F_1 . Wenn die Gaußsche Näherung exakt gilt, dann folgt aus (2.13) $F_1/F_0 = 2V_{\perp}^2$. Da V_{\parallel} nur von F_0 abhängt, kann diese Gleichung durch V_{\parallel}^2 geteilt werden. Dann folgt:

$$\frac{F_1}{2V_{\parallel}^2 F_0} = \frac{V_{\perp}^2}{V_{\parallel}^2} = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \quad (2.15)$$

Das Verhältnis von F_1 zu F_0 erlaubt also die Bestimmung der Temperaturanisotropie. Diese Beziehung kann für den Fall, daß die Gaußsche Näherung nicht exakt gilt, verallgemeinert werden. Dann kann mit Hilfe der Gleichung (2.15) eine “Temperaturanisotropie” als Funktion der Geschwindigkeitskoordinate v_{\parallel} berechnet werden.

2.2 Vlasov – Gleichung für reduzierte Verteilungsfunktionen

Um die reduzierten Verteilungsfunktionen F_k zu bestimmen, wird eine Vlasov – Gleichung für die F_k benötigt. Die Herleitung dieser Gleichung aus der Vlasov – Gleichung (2.1) für Verteilungsfunktionen $f(\vec{v})$ verläuft analog zu der Einführung der $F_k(v_{\parallel})$ aus den $f(\vec{v})$.

Die Definition (2.2) der reduzierten Verteilungen kann als Anwendung des Integraloperators

$$I_k[x] = \int_0^\infty dv_\perp \int_0^{2\pi} d\phi v_\perp^{2k+1} x(v_\parallel, v_\perp, \phi) \quad (2.16)$$

auf die gyrotropen Verteilungsfunktionen $f(v_\parallel, v_\perp)$ betrachtet werden. ϕ stellt den Gyrationwinkel dar. Für den Geschwindigkeitsraum werden Zylinderkoordinaten verwendet.

Durch Anwendung dieses Operators auf die Vlasov – Gleichung für eine gyrotrope Verteilungsfunktion $f(v_\parallel, v_\perp)$ kann eine Gleichung für die reduzierte Verteilungsfunktion F_k hergeleitet werden.

Zunächst wird die stoßfreie Vlasov – Gleichung betrachtet, anschließend werden der Einfluß eines veränderlichen Durchmessers der betrachteten magnetischen Flußröhre, die Welle – Teilchen – Wechselwirkung und die Coulomb – Stöße hinzugefügt.

2.2.1 Die stoßfreie Vlasov – Gleichung

Zuerst wird die linke Seite der Vlasov – Gleichung (2.1) betrachtet. Sie entspricht der stoßfreien Gleichung $\frac{df}{dt} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f + \left(\vec{g} + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (2.17)$$

Die Anwendung des Operators I_k auf die zeitliche Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$ ist trivial:

$$I_k \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{\partial F_k}{\partial t} \quad (2.18)$$

Wenn s die räumliche Koordinate in Magnetfeldrichtung bezeichnet und ∇_\perp die räumliche Ableitung senkrecht dazu, dann kann der Konvektionsterm $(\vec{v} \cdot \nabla) f$ aufgespalten werden in:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) f = v_\parallel \frac{\partial f}{\partial s} + (\vec{v}_\perp \cdot \nabla_\perp) f$$

Aufgrund der angenommenen Gyrotropie ist f und damit $\nabla_\perp f$ ebenso wie $v_\perp = |\vec{v}_\perp|$ vom Gyrationwinkel ϕ unabhängig, so daß der Summand $(\vec{v}_\perp \cdot \nabla_\perp) f$ wie $a \cos \phi + b \sin \phi$ von ϕ abhängt. Bei der Anwendung von I_k verschwindet er durch die Integration über alle ϕ .

Nur der erste Summand liefert einen Beitrag zum Konvektionsterm. Die Anwendung von I_k auf ihn ist kein Problem:

$$I_k[(\vec{v} \cdot \nabla) f] = I_k \left[v_\parallel \frac{\partial f}{\partial s} \right] = v_\parallel \frac{\partial F_k}{\partial s} \quad (2.19)$$

Nun zum Kraftterm der Vlasov – Gleichung. Für gyotropes f lautet der Gradient im Geschwindigkeitsraum:

$$\nabla_v f = \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} \cdot \vec{e}_{v_\parallel} + \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \cdot \vec{e}_{v_\perp} = \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} \cdot \vec{e}_{v_\parallel} + \frac{\vec{v}_\perp}{v_\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \quad (2.20)$$

Zuerst wird der Term des Schwerfeldes $\vec{g} \cdot \nabla_v f$ betrachtet. Mit Gleichung (2.20) schreibt er sich:

$$\vec{g} \cdot \nabla_v f = g_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \vec{g}_{\perp} \frac{\vec{v}_{\perp}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}$ aufgrund der Gyrotropie ebenso von ϕ unabhängig ist wie \vec{g}_{\perp} und v_{\perp} , beschränkt sich die ϕ -Abhängigkeit beim zweiten Summanden genau wie beim Konvektionsterm auf den Vektor \vec{v}_{\perp} , so daß dieser Term bei der Anwendung von I_k verschwindet.

Wenn ψ der Winkel zwischen der Magnetfeldrichtung und der radialen Richtung nach außen ist und g der Betrag der Schwerebeschleunigung, dann ist:

$$g_{\parallel} = -g \cos \psi \quad (2.21)$$

Unter Anwendung von I_k liefert das Schwerfeld damit folgenden Beitrag:

$$I_k[\vec{g} \cdot \nabla_v f] = -g \cos \psi \frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} \quad (2.22)$$

In völlig analoger Weise ergibt sich der Beitrag des elektrischen Feldes \vec{E} :

$$I_k \left[\frac{q}{m} (\vec{E} \cdot \nabla_v) f \right] = \frac{q}{m} E_{\parallel} \frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} \quad (2.23)$$

Es bleibt noch der Term der Lorentz – Kraft $\frac{q}{m} ((\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v) f$. Der Vektor $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$ steht sowohl auf \vec{v}_{\perp} als auch auf \vec{B} und damit \vec{v}_{\parallel} senkrecht. Folglich verschwinden die Skalarprodukte sowohl mit \vec{v}_{\parallel} als auch mit \vec{v}_{\perp} . Mit dem Gradienten (2.20) folgt:

$$\frac{q}{m} ((\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v) f = 0 \quad (2.24)$$

Dementsprechend liefert dieser Term bei Anwendung des Operators I_k keinen Beitrag. Zusammenfassen der Gleichungen (2.18), (2.19), (2.22) und (2.23) ergibt für die gesuchte stoßfreie Vlasov – Gleichung reduzierter Verteilungsfunktionen F_k :

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial F_k}{\partial s} + \left(\frac{q}{m} E_{\parallel} - g \cos \psi \right) \frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} = 0 \quad (2.25)$$

2.2.2 Die Spiegelkraft

Die stoßfreie Vlasov – Gleichung (2.25) ist unabhängig vom Magnetfeld \vec{B} , da die Lorentz – Kraft nach (2.24) herausgefallen ist. Diese Argumentation gilt aber nur in einem homogenen Magnetfeld. In einem inhomogenen Feld treten die Ionen aufgrund ihrer endlichen Gyroradien mit einem Magnetfeld in Wechselwirkung, das nicht parallel zu dem Magnetfeld am Ort des Gyrationenzentrums sein muß. Dann gilt das Argument $\vec{e}_{v_{\parallel}} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{e}_{v_{\parallel}} \cdot (\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) = 0$ nicht mehr, und die Lorentzkraft geht in die Gleichung (2.25) ein.

Die Wirkung eines inhomogenen Magnetfeldes auf die Ionenbewegung kann durch die Spiegelkraft \vec{F}_s beschrieben werden. Die Herleitung der Spiegelkraft erfolgt über die adiabatischen Invarianten der Bewegung eines Teilchens im Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \text{magnetisches Moment: } \mu &= \frac{mv_\perp^2}{2B} \\ \text{kinetische Energie} &: \frac{1}{2}m(v_\parallel^2 + v_\perp^2) = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B \end{aligned} \quad (2.26)$$

Entlang der betrachteten magnetischen Flußröhre mit Querschnitt A gilt aufgrund der Erhaltung des magnetischen Flusses $B \cdot A = \text{konst.}$:

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -\frac{B}{A} \frac{\partial A}{\partial s} \quad (2.27)$$

Wenn die magnetische Flußdichte bzw. der Flußröhrenquerschnitt nur von der Ortskoordinate s , nicht aber von der Zeit t abhängt, kann in dieser Gleichung auch eine totale statt der partiellen Ableitung geschrieben werden.

Ein Teilchen, das sich mit der Geschwindigkeit v_\parallel durch eine Flußröhre mit zeitlich konstanter Geometrie bewegt, sieht eine Magnetfeldänderung

$$\frac{dB}{dt} = v_\parallel \frac{dB}{ds} \quad (2.28)$$

Aus den adiabatischen Invarianten (2.26) läßt sich folgende Bewegungsgleichung für ein Teilchen in der Flußröhre bilden:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_\parallel}{dt} &\stackrel{(2.26)}{=} -\frac{\mu}{v_\parallel} \frac{dB}{dt} \stackrel{(2.28)}{=} -\mu \frac{dB}{ds} \stackrel{(2.27)}{=} -\frac{\mu B}{A} \frac{dA}{ds} \stackrel{(2.26)}{=} -\frac{mv_\perp^2}{2A} \frac{dA}{ds} \\ m \frac{dv_\perp}{dt} &\stackrel{(2.26)}{=} \frac{\mu}{v_\perp} \frac{dB}{dt} \stackrel{(2.28)}{=} \mu \frac{v_\parallel}{v_\perp} \frac{dB}{ds} \stackrel{(2.27)}{=} -\frac{v_\parallel}{v_\perp} \frac{\mu B}{A} \frac{dA}{ds} \stackrel{(2.26)}{=} -\frac{mv_\parallel v_\perp}{2A} \frac{dA}{ds} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Spiegelkraft $\vec{F}_s = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ lautet daher:

$$\vec{F}_s = \frac{mv_\perp}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} (v_\perp \vec{e}_\parallel - v_\parallel \vec{e}_\perp) \quad (2.30)$$

Diese Kraft beschreibt die Bewegung eines einzelnen Teilchens in der magnetischen Flußröhre. Um die Wirkung der Kraft auf eine Verteilungsfunktion f zu berechnen, ist der Beschleunigungsterm $\frac{1}{m}(\vec{F}_s \cdot \nabla_v)f(\vec{v})$ der Vlasov – Gleichung (2.1) hinzuzufügen. Mit (2.30) lautet er:

$$\frac{v_\perp}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} (v_\perp \vec{e}_\parallel - v_\parallel \vec{e}_\perp) \cdot \nabla_v f \quad (2.31)$$

Um die Wirkung der Spiegelkraft auf die reduzierten Verteilungen F_k zu berechnen, ist der Operator I_k auf den Spiegel-Term anzuwenden. Mit Hilfe des Gradienten (2.20) schreibt er sich:

$$\frac{v_\perp^2}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} - \frac{v_\parallel v_\perp}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial v_\perp}$$

Unter dem Operator I_k wird aus dem ersten Summanden nach Definition (2.2) der F_k einfach $\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial s}$.

Der zweite Summand ist dagegen von der Form $-v_\perp \frac{\partial f}{\partial v_\perp}$ und führt bei Anwendung von I_k auf ein Integral $-2\pi \int_0^\infty v_\perp^{2k+2} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} dv_\perp$. Durch partielle Integration läßt es sich in $2\pi \cdot 2(k+1) \int_0^\infty v_\perp^{2k+1} f dv_\perp = 2(k+1)F_k$ umformen, wobei berücksichtigt wurde, daß für eine Verteilungsfunktion $f(v_\perp \rightarrow \infty) = 0$ gelten muß. Daher liefert der zweite Summand einen Beitrag $\frac{v_\parallel 2(k+1)}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} F_k$.

Einfügen des Spiegel-Terms für die F_k in die stoßfreie Vlasov – Gleichung (2.25) erlaubt es, die gesuchte Vlasov – Gleichung für reduzierte Verteilungen aufzuschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial F_k}{\partial s} + \left(\frac{q}{m} E_\parallel - g \cos \psi \right) \frac{\partial F_k}{\partial v_\parallel} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial F_{k+1}}{\partial v} + 2v_\parallel (k+1) F_k \right) = \\ \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{W.-T.} + \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{Coul.} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite deuten die durch die Welle - Teilchen – Wechselwirkung und Coulomb – Stöße verursachten zeitlichen Änderungen der reduzierten Verteilungen an. Sie werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

Die Spiegelkraft führt die reduzierte Verteilung nächsthöherer Ordnung F_{k+1} in die Gleichung für F_k ein. Die Berechnung von F_0 erfordert also die Kenntnis von F_1 , für F_1 ist F_2 notwendig usw.. Wie schon erwähnt, erfordert dies einen Abschluß der Gleichungen für die F_k . Hierfür wird die Gaußsche Näherung verwendet.

2.2.3 Das elektrische Feld

Während die Berechnung der Schwerebeschleunigung einfach durch

$$g = \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2 \cdot 274 \text{ m/s}^2 \quad (2.33)$$

erfolgt, wobei r den Abstand des betrachteten Punktes vom Sonnenmittelpunkt angibt und der Zahlenwert 274 m/s^2 für die Schwerebeschleunigung an der Sonnenoberfläche verwendet wird, ist die Berechnung des elektrischen Feldes etwas komplizierter.

Ein elektrisches Feld entsteht, weil die Ionen und Elektronen aufgrund ihrer stark unterschiedlichen Massen unter dem Einfluß des Schwerfeldes unterschiedliche Skalenhöhen aufweisen. Es kommt zu einer Ladungstrennung mit der Höhe und zur Bildung eines elektrischen Feldes, das die Skalenhöhen der Ionen und Elektronen angleicht.

Das elektrische Feld kann mit Hilfe der Bewegungsgleichung der Elektronen abgeschätzt werden:

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\frac{1}{N_e} \nabla p_e - e(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) \quad (2.34)$$

Da die Elektronenmasse gegenüber den Ionenmassen vernachlässigbar ist, darf m_e in der Bewegungsgleichung gleich 0 gesetzt werden und das dadurch bestimmte \vec{E} in die Ionenbewegungsgleichung bzw. die Vlasov – Gleichung der Ionenverteilung eingesetzt werden.

Aufgrund der Gyrotropie gibt es keine Komponente des E-Feldes senkrecht zum Magnetfeld, außerdem hängt die Ionen – Vlasov – Gleichung (2.32) nur von der Komponente E_{\parallel} ab. Einsetzen von $m_e = 0$ in die Gleichung (2.34) ergibt für diese Komponente:

$$E_{\parallel} = -\frac{1}{eN_e} \frac{\partial p_e}{\partial s} = -\frac{1}{eN_e} \frac{\partial(N_e k_B T_e)}{\partial s} \quad (2.35)$$

Der Lorentz - Term $\vec{v}_e \times \vec{B}$ hat keine Komponente in Magnetfeldrichtung, und auch die Spiegelkraft leistet für $m_e = 0$ keinen Beitrag, da sie nach Gl. (2.30) von der Teilchenmasse abhängt.

Die Elektronendichte N_e kann mit Hilfe der Quasineutralitätsbedingung des Plasmas berechnet werden:

$$eN_e = \sum_j q_j N_j \quad (2.36)$$

Wenn keine Energiegleichung für die Elektronen gelöst werden soll, dann ist die Elektronentemperatur T_e als Funktion der Ortskoordinate s in geeigneter Weise vorzugeben.

Für das elektrische Feld ergibt sich damit:

$$E_{\parallel} = -\frac{1}{e \sum_j q_j N_j} \frac{\partial}{\partial s} \left(k_B T_e \sum_j q_j N_j \right) \quad (2.37)$$

Für den Spezialfall eines Protonen - Elektronen - Plasmas mit $T_p = T_e$ sowie aufgrund der Quasineutralität $N_e = N_p$ ist $E_{\parallel} = -\frac{1}{eN} \frac{\partial}{\partial s} (N_p k_B T_p) = -\frac{1}{eN} \frac{\partial}{\partial s} p_p$. Einsetzen in die Protonen - Impulsgleichung $m_p \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{1}{N_p} \frac{\partial}{\partial s} p_p + eE_{\parallel} + m_p g_{\parallel} + F_S$ führt zu dem Ergebnis, daß das elektrische Feld genau dieselbe Wirkung auf die Protonen ausübt wie der Druckgradient. Dadurch führt es zu einer Verdoppelung der Druckskalenhöhe.

2.2.4 Vorgabe der Flußröhrengometrie

Durch die Einführung reduzierter Verteilungen hat sich die Zahl der Dimensionen des Geschwindigkeitsraumes von ursprünglich 3 auf eine einzige, nämlich v_{\parallel} , verringert. Die linke Seite der Vlasov – Gleichung (2.32) hängt ferner nur noch von der räumlichen Komponente s in Magnetfeldrichtung ab. Die Abhängigkeiten senkrecht dazu sind bei der Anwendung von I_k unter der Annahme von Gyrotropie verschwunden. Bei der Auswertung der rechten Seite in den nächsten Abschnitten wird keine Ortsabhängigkeit auftreten, sowohl die Welle - Teilchen – Wechselwirkung als auch die Coulomb – Stöße hängen nur von den lokalen Plasmabedingungen ab.

Damit ist es gelungen, aus der Gleichung für die 7-dimensionale Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ Gleichungen für nur noch 3-dimensionale reduzierte Verteilungen $F_k(s, v_{\parallel}, t)$ zu entwickeln. Die numerische Lösung dieser sowohl im Orts- als auch Geschwindigkeitsraum 1-dimensionalen Gleichungen für F_0 und F_1 ist aufgrund des erheblich niedrigeren Rechenaufwands im Gegensatz zur Berechnung von f machbar. Aus der Bestimmung der Verteilungsfunktion im vollen Orts- und Geschwindigkeitsraum wird durch die Beschränkung auf die magnetfeldparallelen Koordinaten s und v_{\parallel} eine Beschreibung der Teilchenbewegung entlang einer magnetischen Flußröhre.

Die Vlasov – Gleichung (2.32) weist durch die Spiegelkraft eine Abhängigkeit von der Geometrie des Magnetfeldes auf. Sie hängt von dem Flußröhrenquerschnitt A bzw. nach Gl. (2.27) von der magnetischen Flußdichte B als Funktion der Ortskoordinate s ab. Auch die Komponente g_{\parallel} des Schwerfeldes ist ortsabhängig, zum einen wird sie nach (2.21) durch den Winkel ψ zwischen dem Magnetfeld und der Richtung senkrecht zur Sonnenoberfläche bestimmt, zum anderen ist der Betrag g vom Abstand $r(s)$ zum Sonnenmittelpunkt entlang der Flußröhre abhängig.

Zur Lösung der Vlasov – Gleichung ist es daher ausreichend, die Geometrie des Magnetfeldes durch die Vorgabe des Querschnitts $A(s)$ und der räumlichen Orientierung $(\psi(s), r(s))$ einer Flußröhre als Funktionen der Ortskoordinate s entlang der betrachteten Feldlinie zu beschreiben. Die Abbildung 2.1 verdeutlicht die geometrischen Verhältnisse.

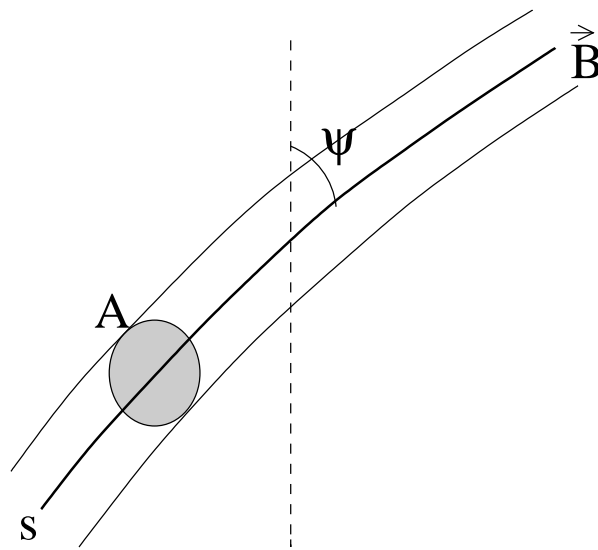


Abbildung 2.1: Die Geometrie einer Flußröhre

Die Geometrie des Magnetfeldes wird im allgemeinen durch das Gleichgewicht zwischen dem magnetischen Druck, der magnetischen Spannung und dem kinetischen Druck der Teilchen bestimmt. Für die Entwicklung eines kinetischen Modells hat das zur Folge, daß die Magnetfeldgeometrie von den Ergebnissen des Modells abhängig ist und so selbstkonsistent berechnet werden muß. Dies würde den Aufwand zur Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32) erheblich vergrößern.

Ein wichtiger Plasmaparameter ist β , das Verhältnis zwischen kinetischem und magnetischem Druck. In einem Plasma mit $\beta \gg 1$ wird die Dynamik durch die Teilchenbewegung bestimmt, das Magnetfeld wird mitgeführt. Im Fall $\beta \ll 1$ dagegen dominiert das Magnetfeld die Teilchenbewegung. In der Korona liegt dieser Fall vor, das Plasma - β liegt typischerweise bei 10^{-2} – 10^{-3} . Daher müssen die Teilchen in ihrer Bewegung dem Magnetfeld folgen, der Einfluß des Plasmaprucks und damit der Modellergebnisse auf die Magnetfeldgeometrie ist zu vernachlässigen, so daß diese fest vorgegeben werden darf.

Die Topologie des Magnetfeldes in der zu modellierenden Region hängt von den großräumigen Strukturen des solaren Magnetfeldes ab. So kann die magnetisch offene Geometrie eines “koronalen Trichters” z.B. nach den Ergebnissen von Hackenberg et al. (1999) verwendet werden.

Denkbar sind auch andere Strukturen wie geschlossene Bögen zwischen verschiedenen Punkten der Sonnenoberfläche.

Mit der Vorgabe der Geometrieparameter A und ψ sowie der Schwerebeschleunigung g als Funktionen der Ortskoordinate s , der Berechnung des elektrischen Feldes sowie der Schließung der Reihe der F_k durch die Gaußsche Näherung ist die Entwicklung der linken Seite der Vlasov – Gleichung für reduzierte Verteilungsfunktionen F_k ($k = 0, 1$) abgeschlossen. Es bleibt noch die Aufgabe, kinetische Terme für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung und die Coulomb – Stöße auf ihrer rechten Seite zu finden und sie durch die F_k auszudrücken.

2.3 Quasilineare Theorie der Welle - Teilchen – Wechselwirkung

Die Welle - Teilchen – Wechselwirkung wird durch die quasilineare Theorie beschrieben. Während die lineare Theorie nur kleine Störungen der Teilchenverteilungen sowie elektrischer und magnetischer Felder vor einem zeitlich unveränderlichen Hintergrund beschreibt und Terme zweiter Ordnung in diesen Störungen vernachlässigt, stellt die quasilineare Theorie eine dahingehende Erweiterung dar, daß sie die Rückwirkung der Wechselwirkung zwischen den Störungen der Teilchenverteilung und der Felder auf das Hintergrundplasma beschreibt. Störungen höherer Ordnung, wie die Wirkung der gestörten Plasmabedingungen auf die Wellenausbreitung und damit Welle - Welle – Wechselwirkung, werden weiterhin vernachlässigt.

Die quasilineare Theorie erweitert die lineare Theorie um eine Beschreibung der Wirkung der Wellen auf eine Teilchenpopulation und ermöglicht so eine Modellierung des koronalen Heizungsprozesses. Da die Störungsentwicklung gegenüber der linearen Theorie nur einen Schritt weiter fortgesetzt wird, ist sie mathematisch wesentlich einfacher als eine voll nichtlineare Theorie.

Zur Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung in der quasilinearen Näherung wird nach Davidson (1972) und Akhiezer et al. (1975) von der Vlasov – Gleichung einer Teilchenverteilung unter dem Einfluß der Felder einer elektromagnetischen Welle ausgegangen. Diese ist identisch mit der stoßfreie Vlasov – Gleichung (2.17):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

Die Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ und die Felder \vec{E} , \vec{B} setzen sich aus Hintergrundwerten (mit Index 0) und Störungen (mit Index 1) zusammen:

$$f = f_0 + f_1 \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \quad (2.38)$$

Die Gültigkeit der quasilinearen Näherung erfordert kleine Störungen:

$$f_1 \ll f_0 \quad (2.39)$$

Auch die Felder der Plasmawellen sollten nicht zu groß sein:

$$|\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0| \quad (2.40)$$

Der Operator $\langle \dots \rangle$ beschreibt eine zeitliche Mittelung über einige Wellenperioden. Für die Störungen gilt dabei:

$$\langle f_1 \rangle = 0, \quad \langle \vec{E}_1 \rangle = 0, \quad \langle \vec{B}_1 \rangle = 0 \quad (2.41)$$

Diese Perioden sollten klein sein gegenüber der Zeitskala, auf der sich die Hintergrundverteilung f_0 unter dem Einfluß der Wellen ändert. Dann ergibt sich durch Einsetzen des Störungsansatzes (2.38) in die Vlasov – Gleichung (2.17) und Durchführung der Mittelung:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_0 + \frac{q}{m} (\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} + \frac{q}{m} \left\langle (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0 \quad (2.42)$$

Der lineare und die quasilineare Theorie unterscheiden sich in dem Term mit der Mittelung. In der linearen Theorie wird er vernachlässigt, da er von zweiter Ordnung in den Störungsparametern ist. Die quasilineare Theorie behält ihn bei, er beschreibt die Veränderung, die das Hintergrundplasma f_0 durch die Wechselwirkung zwischen den Wellenfeldern und den durch sie verursachten Störungen f_1 erfährt.

Wird die Differenz zwischen der Vlasov – Gleichung (2.17) und der gemittelten Gleichung (2.42) gebildet, so erhält man eine Gleichung für die Störung f_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_1 + \frac{q}{m} (\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} + \frac{q}{m} (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} + \\ \frac{q}{m} (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} - \left\langle (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Diese Gleichung gilt allgemein, solange die Aufspaltung der Verteilungsfunktion in einen langsam veränderlichen Hintergrund und eine schnelle Störung möglich ist. In der quasilinearen Näherung werden wie in der linearen Theorie die letzten beiden Summanden als Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Dies unterscheidet die quasilineare von einer voll nichtlinearen Theorie.

Für die Störung f_1 ergibt sich damit:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_1 + \frac{q}{m} (\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} + \frac{q}{m} (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2.44)$$

Die Wirkung der Wellen auf das Hintergrundplasma wird in (2.42) durch den Term mit der Mittelung beschrieben:

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{W.-T.} = -\frac{q}{m} \left\langle (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} \right\rangle \quad (2.45)$$

Zur Berechnung dieses Ausdrucks ist es erforderlich, die Störung f_1 mit Hilfe des Hintergrunds f_0 zu bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung (2.44) für f_1 . Es fällt auf, daß diese Gleichung nicht von f_0 selber, sondern nur von $\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}$ abhängig ist. Bei der Auswertung von (2.45) wird f_1 ebenfalls nach \vec{v} differenziert. Daraus ergibt sich, daß der gesuchte Ausdruck für die quasilineare Welle - Teilchen – Wechselwirkung die Form einer Diffusionsgleichung hat:

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{W.-T.} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\mathbf{D} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \right) \quad (2.46)$$

Die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten \mathbf{D} erfordert die Lösung der Gleichung (2.44) für f_1 und die Durchführung der Mittelung in (2.45) für ein gegebenes Wellenfeld. Auch wenn nur Wellenausbreitung in Richtung des Hintergrundmagnetfeldes, also $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$, betrachtet wird, ist diese Rechnung mit erheblichem algebraischen Aufwand verbunden. Sie wird in Davidson (1972) mit Hilfe einer Fourierentwicklung sowohl der Felder als auch der Störung f_1 durchgeführt. Das Ergebnis lautet für eine gyrotrope Verteilungsfunktion f_0 in der von Marsch (1998) verwendeten Form:

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_{W,-T} = \Omega^2 \frac{1}{4} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \cdot \Im \left\{ \left[v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \left(\frac{z_{-k}}{k} + v_{\parallel} \right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \right] \cdot \frac{1}{kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega} \cdot \left[v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \left(\frac{z_k}{k} - v_{\parallel} \right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right] \right\} f_0 \quad (2.47)$$

Hierbei ist $\hat{\mathcal{B}}_k^{\pm}$ die auf die Energiedichte des Hintergrundmagnetfeldes normierte spektrale Energiedichte \mathcal{B}_k^{\pm} der Wellen:

$$\hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} = \frac{2\mu_0}{B^2} \mathcal{B}_k^{\pm} \quad (2.48)$$

z_k ist die komplexe Frequenz $\omega + i\gamma$, die sich aus der Dispersionsrelation des Plasmas für die Wellenzahl k ergibt. Es wird nur Wellenausbreitung in Magnetfeldrichtung betrachtet. \Im definiert den Imaginärteil eines komplexen Ausdrucks. Die Summe über die beiden Vorzeichen symbolisiert die Beiträge rechtszirkularer (+) und linkszirkularer (−) Wellen.

2.3.1 Einführung reduzierter Verteilungsfunktionen

Um die Vlasov – Gleichung (2.32) für reduzierte Verteilungen auszuwerten, werden quasilineare Diffusionsgleichungen für F_0 und F_1 benötigt. Sie lassen sich durch Anwendung des Integraloperators I_k nach (2.16) auf die Diffusionsgleichung (2.47) für $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ bestimmen. Die Ableitungen nach v_{\perp} können dabei durch partielle Integration beseitigt werden. Auf diese Weise entstehen Terme, deren Abhängigkeit von v_{\perp} nur von der Form $\int_0^{\infty} v_{\perp}^{2k+1} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) dv_{\perp}$ ist, so daß sich die Definition (2.2) der reduzierten Verteilungen anwenden läßt.

Das Ergebnis kann nach Marsch (1998) in sehr kompakter Weise aufgeschrieben werden:

$$\left(\frac{\delta F_0}{\delta t} \right)_{W,-T} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(D(v_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} F_1(v_{\parallel}) \right) - \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(A^+(v_{\parallel}) F_0(v_{\parallel}) \right) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta F_1}{\delta t} \right)_{W,-T} = & \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(D(v_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} F_2(v_{\parallel}) \right) - 2 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(A^+(v_{\parallel}) F_1(v_{\parallel}) \right) + \\ & A^-(v_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} F_1(v_{\parallel}) - H(v_{\parallel}) F_0(v_{\parallel}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Da die quasilineare Diffusionsgleichung (2.47) für $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ Faktoren v_{\perp} enthält, weist die Gleichung für $F_k(v_{\parallel})$ eine Abhängigkeit von der nächsthöheren Ordnung $F_{k+1}(v_{\parallel})$ auf. Bei $F_1(v_{\parallel})$ ist dadurch die Anwendung der Gaußschen Näherung (2.14) notwendig:

$$F_2(v_{\parallel}) = 4V_{\perp}^2 F_1(v_{\parallel})$$

Die Integration über das Wellenspektrum ist in die Koeffizienten $D(v_{\parallel})$, $A^{\pm}(v_{\parallel})$ und $H(v_{\parallel})$ übergegangen:

$$D(v_{\parallel}) = \Omega^2 \frac{1}{4} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \cdot \Im \left\{ \frac{1}{kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega} \right\} \quad (2.51)$$

$$A^{\pm}(v_{\parallel}) = \Omega^2 \frac{1}{2} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \cdot \Im \left\{ \frac{z_{\pm k}/k \mp v_{\parallel}}{kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega} \right\} \quad (2.52)$$

$$H(v_{\parallel}) = \Omega^2 \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \cdot \Im \left\{ \frac{1}{kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega} \left(\frac{z_k}{k} - v_{\parallel} \right) \left(\frac{z_{-k}}{k} + v_{\parallel} \right) \right\} \quad (2.53)$$

Aus der Struktur der Gleichungen (2.49) und (2.50) ist zu erkennen, daß D ein Diffusionskoeffizient im Geschwindigkeitsraum ist. Die Terme mit A^{\pm} enthalten wie der Kraftterm der Vlasov – Gleichung (2.32) erste Ableitungen nach v_{\parallel} , so daß A^{\pm} die physikalische Bedeutung einer Beschleunigung der Teilchen durch die Wellen hat. $H(v_{\parallel})$ schließlich tritt als Quellterm in der Gleichung für F_1 auf. Da F_1 nach (2.7) direkt mit T_{\perp} verknüpft ist und das Verhältnis von F_1 zu F_0 nach (2.15) die Temperaturanisotropie bestimmt, stellt $H(v_{\parallel})$ einen Heizungsterm für T_{\perp} dar.

2.3.2 Dispersionsrelation des Plasmas

Um die Wirkung der Plasmawellen auf die reduzierten Verteilungsfunktionen zu berechnen, müssen die Integrale über das Wellenspektrum in den Gleichungen (2.51) – (2.53) ausgewertet werden. Die Integranden hängen dabei nicht nur von der spektralen Energiedichte $\hat{\mathcal{B}}_k^{\pm}$ als Funktion der Wellenzahl k ab, sondern auch vom Quotienten $\frac{z_k}{k}$ und somit von den Dispersionsseigenschaften des Plasmas.

Nach Dum et al. (1980) lautet die Dispersionsrelation des Plasmas:

$$\left(\frac{ck}{z_k} \right)^2 = 1 + \sum_j \left(\frac{\omega_j}{z_k} \right)^2 \hat{\epsilon}_j^{\pm}(z_k, k) \quad (2.54)$$

Dabei symbolisiert der Index j wieder die verschiedenen Teilchensorten, und $\omega_j^2 = \frac{N_j q_j^2}{m_j \epsilon_0}$ gibt ihre Plasmafrequenzen an. Die Dielektrizitätskonstante ergibt sich für eine gyrotrope Verteilungsfunktion durch Integration über den Geschwindigkeitsraum:

$$\hat{\epsilon}_j^{\pm} = 2\pi \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{v_{\perp}/2}{v_{\parallel} - (z_k \pm \Omega)/k} \left((v_{\parallel} - \frac{z_k}{k}) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) f_j(v_{\parallel}, v_{\perp}) \quad (2.55)$$

Da die Reihenfolge der Integration über v_{\parallel} und v_{\perp} vertauschbar ist, kann das Integral über v_{\perp} mit Hilfe der Definition (2.2) der reduzierten Verteilungsfunktionen ausgewertet werden. Die Ableitung nach v_{\perp} wird durch partielle Integration beseitigt, und es ergibt sich:

$$\hat{\epsilon}_j^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{1}{(z_k \pm \Omega)/k - v_{\parallel}} \left((v_{\parallel} - \frac{z_k}{k}) F_{j,0}(v_{\parallel}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} F_{j,1}(v_{\parallel}) \right) \quad (2.56)$$

In Marsch (1998) wird diese Dispersionsrelation für bi-maxwellverteilte $F_{j,k}$ berechnet. Für den Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega \ll \Omega_j$ ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit der Wellen:

$$v_{ph} = \frac{\omega_k}{k} = U_m \pm \sqrt{v_A^2 - \sum_j \frac{\rho_j}{\rho} (V_{\parallel j}^2 - V_{\perp j}^2 + \Delta U_j^2)} \quad (2.57)$$

Hier symbolisiert das Wechselvorzeichen die beiden Ausbreitungsrichtungen der Wellen parallel und antiparallel zum Magnetfeld. v_A ist die Alfvéngeschwindigkeit, U_m die Schwerpunktschwindigkeit des Plasmas und ΔU_j die Differenz zwischen der Driftgeschwindigkeit der Teilchensorte j und der Schwerpunktschwindigkeit.

Strenggenommen gilt diese Phasengeschwindigkeit nur für den Grenzfall sehr kleiner Frequenzen. Aufgrund des Resonanznenners bei den Koeffizienten D , A^\pm und H nach (2.51) – (2.53) sind aber gerade Frequenzen im Bereich der Gyrofrequenzen der Teilchensorten für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung wichtig. Das Dispersionsverhalten des Plasmas unterscheidet sich dort aufgrund der Ionenzyklotronresonanzen von dem linearen Verlauf nach (2.57).

Mit Ausnahme von Protonen und Alpha – Teilchen weisen alle Ionensorten im koronalen Plasma sehr niedrige Konzentrationen auf. Aus der allgemeinen Dispersionsrelation (2.54) folgt, daß der Einfluß einer Teilchensorte auf das Dispersionsverhalten mit der Dichte N abfällt. Daher beeinflussen die schweren Ionen das Dispersionsverhalten des koronalen Plasmas kaum, so daß für sie von dem linearen Dispersionsverlauf (2.57) ausgegangen werden darf.

Wenn auch für die Protonen und Alpha – Teilchen ein linearer Dispersionsverlauf angenommen wird, können aufgrund des Unterschieds zum wirklichen Dispersionsverhalten des Plasmas Fehler bei der Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung auftreten. Da die Annahme von Dispersionsfreiheit aber zu einer erheblichen Vereinfachung bei der Berechnung der Koeffizienten D , A^\pm und H führt, wird der lineare Dispersionsverlauf (2.57) für alle Frequenzen bzw. Wellenzahlen verwendet. Auf den möglichen Einfluß auf die Protonen wird bei der Diskussion von Simulationsergebnissen eingegangen.

“Stoßzeit” τ für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung

Die Koeffizienten D , A^\pm und H der quasilinearen Diffusionsgleichungen für die reduzierten Verteilungsfunktionen werden nach (2.51) – (2.53) auf sehr ähnliche Weise berechnet. Sie entsprechen Integralen der spektralen Energiedichte über alle Wellenzahlen, gewichtet mit dem Imaginärteil eines Bruchs. Der Nenner $kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega$ ist bei allen Koeffizienten gleich und entspricht der Resonanzbedingung $z_k = kv_{\parallel} \mp \Omega$. Der Zähler dieses Bruchs ist entweder 1 oder von der Form $\frac{z_k}{k} - v_{\parallel}$. Durch die Abhängigkeit von der Phasengeschwindigkeit der Wellen ist er im allgemeinen von der Wellenzahl k abhängig.

Für dispersionsfreie Wellen gilt dagegen $\Re\left(\frac{z_k}{k}\right) = v_{ph} = konst.$, so daß zumindest der Realteil vor das Integral über k gezogen werden darf. Es bietet sich daher an, eine “Stoßzeit” τ zwischen Wellen und Teilchen zu definieren:

$$\frac{1}{\tau} = \Omega^2 \frac{1}{2} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \cdot \Im \left\{ \frac{1}{kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega} \right\} \quad (2.58)$$

Der Resonanzterm mit dem Nenner $kv_{\parallel} - z_k \mp \Omega = kv_{\parallel} - \omega_k \mp \Omega - i\gamma$ kann in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden:

$$\frac{1}{kv_{\parallel} - \omega_k \mp \Omega - i\gamma} = \frac{i\gamma}{(\omega_k \pm \Omega - kv_{\parallel})^2 + \gamma^2} - \frac{\omega \pm \Omega - kv_{\parallel}}{(\omega_k \pm \Omega - kv_{\parallel})^2 + \gamma^2} \quad (2.59)$$

Für endliches γ ist die Auswertung des Integrals in (2.58) sehr aufwendig. Für den Grenzfall einer scharfen Resonanz $\gamma \rightarrow 0$ vereinfacht es sich aufgrund der Eigenschaft

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{(\omega_k \pm \Omega - kv_{\parallel})^2 + \gamma^2} = \pi \delta(\omega_k \pm \Omega - kv_{\parallel}) \quad (2.60)$$

der δ -Distribution. τ^{-1} schreibt sich dann:

$$\frac{1}{\tau} = \Omega^2 \frac{\pi}{2} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \delta(\omega_k \pm \Omega - kv_{\parallel}) \quad (2.61)$$

In dieser Schreibweise wird τ durch ein Integral über das Wellenzahlspektrum der Wellen definiert. In der Korona der Sonne ändern sich jedoch die Plasmadichte und das Magnetfeld in erheblichem Maße mit der Höhe, so daß die Alfvéngeschwindigkeit stark ortsabhängig ist. Wenn eine Plasmawelle durch diesen Hintergrund läuft, bleibt ihre Frequenz ω konstant, während sich die Wellenzahl $k = \omega/v_{ph}$ mit der Höhe ändert. Daher ist es sinnvoll, nicht $\hat{\mathcal{B}}_k^{\pm}$, sondern $\hat{\mathcal{B}}_{\omega}^{\pm}$ zu verwenden. Die Gleichung (2.61) ergibt dann:

$$\frac{1}{\tau} = \Omega^2 \frac{\pi}{2} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathcal{B}}_{\omega}^{\pm} \delta(\omega_k \pm \Omega - kv_{\parallel}) \quad (2.62)$$

Für dispersionsfreie Wellen liefert Einsetzen der Dispersionsrelation $\omega/k = v_{ph}$:

$$\frac{1}{\tau} = \Omega^2 \frac{\pi}{2} \sum_{+,-} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathcal{B}}_{\omega}^{\pm} \delta\left(\omega \left(\frac{v_{ph} - v_{\parallel}}{v_{ph}}\right) \pm \Omega\right)$$

Die Integration über die δ -Distribution ist trivial:

$$\frac{1}{\tau} = \Omega^2 \frac{\pi}{2} \left| \frac{v_{ph}}{v_{ph} - v_{\parallel}} \right| \cdot \left(\hat{\mathcal{B}}_{\omega=\frac{v_{ph}\Omega}{v_{\parallel}-v_{ph}}}^{+} + \hat{\mathcal{B}}_{\omega=\frac{v_{ph}\Omega}{v_{ph}-v_{\parallel}}}^{-} \right)$$

Da die Stärke des Hintergrundmagnetfeldes B von der Ortskoordinate s abhängig ist, wird nicht die normierte spektrale Energiedichte $\hat{\mathcal{B}}_{\omega}^{\pm}$, sondern ihr absoluter Wert $\mathcal{B}_{\omega}^{\pm}$ verwendet. Die Definition von τ schreibt sich dann:

$$\frac{1}{\tau} = \pi \Omega^2 \frac{\mu_0}{B^2} \left| \frac{v_{ph}}{v_{ph} - v_{\parallel}} \right| \cdot \left(\mathcal{B}_{\omega=\frac{v_{ph}\Omega}{v_{\parallel}-v_{ph}}}^{+} + \mathcal{B}_{\omega=\frac{v_{ph}\Omega}{v_{ph}-v_{\parallel}}}^{-} \right) \quad (2.63)$$

Für den Grenzfall scharfer Resonanz lassen sich die Gleichungen (2.51) – (2.53) für die Koeffizienten D , A^{\pm} und H erheblich vereinfachen. Die Faktoren $z_k/k - v_{\parallel} = (v_{ph} - v_{\parallel}) + i\gamma/k$ liefern zwar Beiträge in dem Resonanzterm (2.59):

$$\Im \left(\frac{z_k/k - v_{\parallel}}{kv_{\parallel} - \omega \mp \Omega - i\gamma} \right) = (v_{ph} - v_{\parallel}) \frac{\gamma}{(\omega \pm \Omega - kv_{\parallel})^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma}{k} \frac{\omega \pm \Omega - kv_{\parallel}}{(\omega \pm \Omega - kv_{\parallel})^2 + \gamma^2}$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite basiert auf dem Imaginärteil von z_k . Bei der Integration über alle k führt auch er für $\gamma \rightarrow 0$ nach (2.60) zu einer δ -Distribution. Als zusätzlichen Faktor besitzt er jedoch $(\omega \pm \Omega - kv_{\parallel})$, der an der Resonanzstelle verschwindet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\mathcal{B}}_k^{\pm} \cdot (\omega \pm \Omega - kv_{\parallel}) \cdot \delta(\omega \pm \Omega - kv_{\parallel}) = 0$$

Der Imaginärteil von z_k in den Zählern von (2.51) – (2.53) liefert demnach keinen Beitrag, und es gilt einfach:

$$D = \frac{1}{2\tau} \quad (2.64)$$

$$A^{\pm} = \pm \frac{1}{\tau} (v_{ph} - v_{\parallel}) \quad (2.65)$$

$$H = -\frac{2}{\tau} (v_{ph} - v_{\parallel})^2 \quad (2.66)$$

Damit ist es gelungen, die Koeffizienten D , A^{\pm} und H in einfacher Weise auf die “Stoßzeit” τ zurückzuführen.

Dämpfungs- bzw. Anwachsrate γ

Auch wenn die Anwachsrate γ durch den Ansatz einer scharfen Resonanz bei der Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung nicht gebraucht wird, ist diese Größe bei der Untersuchung der Stabilität oder Instabilität der durch numerische Simulation gewonnenen Verteilungsfunktionen hilfreich.

Die Anwachsrate γ kann mit Hilfe der Dispersionsrelation des Plasmas berechnet werden, vgl. z.B. Baumjohann und Treumann (1996):

$$\gamma = -\frac{D_i(\omega, \gamma = 0, k)}{\partial D_r(\omega, \gamma, k)/\partial \omega|_{\gamma=0}} \quad (2.67)$$

Die Indizes kennzeichnen den Real- und Imaginärteil der Dispersionsfunktion. Einsetzen der Dispersionsrelation nach (2.54) ergibt unter Verwendung des $\hat{\epsilon}_j^{\pm}$ nach (2.56) für den Imaginärteil D_i :

$$\begin{aligned} D_i = & c^2 k^2 \frac{2\omega\gamma}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} + \sum_j \frac{\omega_j^2 2\omega\gamma}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \\ & + \sum_j \frac{\omega_j^2}{N} \frac{2\omega\gamma}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \int dv_{\parallel} \frac{k(kv_{\parallel} - (\omega \pm \Omega_j))}{(kv_{\parallel} - (\omega \pm \Omega_j))^2 + \gamma^2} \left(\pm \frac{\Omega_j}{k} F_{j,0}(v_{\parallel}) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{j,1}(v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} \right) \\ & - \sum_j \frac{\omega_j^2}{N} \frac{\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \int dv_{\parallel} \frac{k\gamma}{(kv_{\parallel} - (\omega \pm \Omega_j))^2 + \gamma^2} \left(\pm \frac{\Omega_j}{k} F_{j,0}(v_{\parallel}) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{j,1}(v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

ω_j ist wieder die Plasmafrequenz. Für den Grenzfall $\gamma \rightarrow 0$ vereinfacht sich dieser Ausdruck erheblich. Die ersten beiden Summanden entfallen, und die Integranden enthalten Faktoren der Form (2.60), die sich in δ -Distributionen überführen lassen. Dabei enthält das erste Integral

einen Faktor $kv_{\parallel} - (\omega \pm \Omega_j)$, der gerade an der Resonanzstelle verschwindet. Daher liefert nur der letzte Term einen Beitrag:

$$D_i(\omega, \gamma = 0, k) = - \sum_j \frac{\pi}{N} \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 \cdot \left(\pm \frac{\Omega_j}{k} F_{j,0}(v_{\parallel}) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{j,1}(v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} \right) \Big|_{v_{\parallel}=(\omega \pm \Omega_j)/k} \quad (2.69)$$

Da die Frage, ob eine Plasmainstabilität vorliegt oder nicht im wesentlichen vom Vorzeichen von D_i und weniger vom Realteil D_r abhängt, und die Welle - Teilchen - Wechselwirkung unter der Näherung dispersionsfreier Wellen berechnet wird, wird für den Realteil $D_r = (1 - (\frac{v_{ph}k}{\omega})^2) \cdot (\frac{c}{v_A})^2$ eingesetzt. Der Faktor $(\frac{c}{v_A})^2$ ist aufgrund der Struktur der Dispersionsrelation (2.54) notwendig.

Es folgt: $\frac{\partial D_r}{\partial \omega} = \frac{2v_{ph}^2 k^2}{\omega^3} \cdot (\frac{c}{v_A})^2$, also:

$$\frac{\partial D_r(\omega, \gamma, k)}{\partial \omega} \Big|_{\gamma=0} = \frac{2}{\omega} \cdot \left(\frac{c}{v_A} \right)^2 \quad (2.70)$$

Einsetzen in (2.67) ergibt schließlich die gesuchte Anwachsrate γ :

$$\gamma = \omega \frac{\pi}{2} \left(\frac{v_A}{c} \right)^2 \sum_j \frac{1}{N} \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 \cdot \left(\pm \frac{\Omega_j}{k} F_{j,0}(v_{\parallel}) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{j,1}(v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} \right) \Big|_{v_{\parallel}=(\omega \pm \Omega_j)/k} \quad (2.71)$$

2.3.3 Energiebilanz zwischen Teilchen und Wellen

Die Wellen erfahren bei ihrer Ausbreitung in Richtung der Ortskoordinate s durch Dämpfung und aufgrund von Variationen der lokalen Phasengeschwindigkeit sowie des Flußröhrenquerschnitts A Änderungen ihrer Energiedichte. Wenn zusätzlich eine Funktion $\mathcal{F}(\omega, s, t)$ für einen spektralen Energietransfer berücksichtigt wird, kann nach Tu und Marsch (1997) eine Energiegleichung für die Wellen angegeben werden:

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} (A v_{ph} \mathcal{B}_{\omega}) + \mathcal{B}_{\omega} \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial s} (A U_m) = \frac{\delta \mathcal{B}_{\omega}}{\delta t} \Big|_{W.-T.} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} \quad (2.72)$$

Durch Integration dieser Gleichung über alle Frequenzen ω kann eine völlig analoge Energiegleichung für die Gesamtenergie des Spektrums

$$E_S = \int \mathcal{B}_{\omega} d\omega \quad (2.73)$$

gewonnen werden.

Der Term $\frac{\delta \mathcal{B}_{\omega}}{\delta t} \Big|_{W.-T.}$ berücksichtigt die Energieübertragung von den Wellen auf die Teilchen und damit die Dämpfung der Wellen infolge der Welle - Teilchen - Wechselwirkung. Dieser Energietransfer könnte prinzipiell mit Hilfe des Imaginärteils γ der Frequenz nach (2.71) berechnet werden. Da die Berechnung von γ aber auf einigen Annahmen beruht, könnte es dabei zu einer Verletzung der Energieerhaltung kommen. Dagegen ist die Energieerhaltung garantiert, wenn der Energieverlust der Wellen dem Gewinn an kinetischer Teilchenenergie infolge der Welle - Teilchen - Wechselwirkung gegenübergestellt wird:

$$- \frac{\delta E_S}{\delta t} \Big|_{W.-T.} = - \int \frac{\delta \mathcal{B}_{\omega}}{\delta t} \Big|_{W.-T.} d\omega = \sum_j \frac{m_j}{2} \int v_{\parallel}^2 \left(\frac{\delta F_{j,0}}{\delta t} \right) \Big|_{W.-T.} + \left(\frac{\delta F_{j,1}}{\delta t} \right) \Big|_{W.-T.} dv_{\parallel} \quad (2.74)$$

Diese Energiebilanz gibt zunächst nur die Änderung der Gesamtenergie der Wellen an. Daher stellt sich die Frage, ob es ausreicht, die Form des Spektrums als Funktion von ω konstant zu halten und nur die Gesamtenergie zu variieren, indem das ganze Spektrum mit einem höhenabhängigen Faktor multipliziert wird.

Verwendung eines starren Spektrums?

In diesem Unterabschnitt werden die Konsequenzen des Ansatzes eines starren Potenzspektrums

$$\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}_{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-\alpha} \quad (2.75)$$

diskutiert. ω_0 ist eine willkürliche Referenzfrequenz und \mathcal{B}_{ω_0} die spektrale Energiedichte dort. Der Spektralkoeffizient α liegt typischerweise im Bereich $1 < \alpha < 2$. Die Gesamtenergie dieses Spektrums wird einfach durch $E_S = \int_{\omega_L}^{\infty} \mathcal{B}_\omega d\omega$ berechnet. Dabei ist ω_L eine untere Grenzfrequenz, die sinnvollerweise etwas unterhalb der niedrigsten im Plasma vorkommenden Gyrofrequenz liegt. Damit ergibt sich für E_S :

$$E_S = (\mathcal{B}_{\omega_0} \omega_0^\alpha) \frac{1}{\alpha - 1} \omega_L^{1-\alpha} \quad (2.76)$$

Die Wellenenergiedichte E_S kann dazu benutzt werden, die willkürliche Referenzfrequenz ω_0 aus der Gleichung (2.75) für das Spektrum zu eliminieren:

$$\mathcal{B}_\omega = (\alpha - 1) E_S \omega_L^{\alpha-1} \cdot \omega^{-\alpha} \quad (2.77)$$

Es sollen nun die Konsequenzen dieses Ansatzes für die Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung abgeschätzt werden. Für das koronale Plasma gilt $\beta \ll 1$ und damit $v_{th} \ll v_A$. Es werden nur Wellen betrachtet, die sich in Richtung der Ortskoordinate s bewegen, z.B. in der magnetisch offenen Struktur eines koronalen Trichters nach außen. Dann können die Ionen nur die Resonanzbedingung der linkszirkular polarisierten Wellen in (2.63) erfüllen: $\omega = \frac{v_{ph}\Omega}{v_{ph}-v_{\parallel}}$

Einsetzen der spektralen Energiedichte (2.77) auf dieser Frequenz in die “Stoßzeit” τ nach (2.63) ergibt:

$$\frac{1}{\tau} = (\alpha - 1) \frac{\mu_0}{B^2} E_S \Omega \pi \left(\frac{v_{ph} - v_{\parallel}}{v_{ph}} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\omega_L}{\Omega} \right)^{\alpha-1} \quad (2.78)$$

Da $v_{th} \ll v_A$ ist, kann der Term $\frac{v_{ph}-v_{\parallel}}{v_{ph}}$ gleich 1 gesetzt werden. Außerdem wird die Welle - Teilchen – Wechselwirkung nach (2.49), (2.50) durch die Heizrate H dominiert, da der entsprechende Term nach (2.66) quadratisch in v_{ph} ist. Für das Integral (2.74) hat das zur Folge:

$$\left. \frac{\delta E_S}{\delta t} \right|_{W.-T.} \approx \frac{m}{2} \int H F_0 dv_{\parallel} \approx \frac{m}{2} \int -\frac{2}{\tau} v_{ph}^2 F_0 dv_{\parallel} \approx -\frac{m}{\tau} N v_{ph}^2$$

Einsetzen des τ nach (2.78) ergibt unter Berücksichtigung von $v_A \approx v_{ph}$:

$$\left. \frac{\delta E_S}{\delta t} \right|_{W.-T.} = -E_S (\alpha - 1) \Omega \pi \left(\frac{\omega_L}{\Omega} \right)^{\alpha-1}$$

Da ω_L im Bereich der Gyrofrequenz liegt und $1 < \alpha < 2$, gilt größenordnungsmäßig:

$$\left. \frac{\delta E_S}{\delta t} \right|_{W.-T.} = -E_S \cdot \Omega \quad (2.79)$$

Der Ansatz eines starren Spektrums führt also zu einer Wellenabsorption auf der Zeitskala der Gyrationperiode. Dem entspricht eine Dämpfungslänge im Bereich der Ionenträgheitslänge. Da diese unter koronalen Bedingungen von der Größenordnung 1 m ist, können sich nach diesem Ergebnis keine Wellen in der Korona ausbreiten, sie werden sofort absorbiert.

Die physikalische Ursache dieses Ergebnisses liegt in dem Ansatz eines starren Spektrums. Absorption von Wellen erfolgt nur bei Frequenzen, die die Resonanzbedingung $\omega = \pm \frac{v_{ph}\Omega}{v_{ph}-v_{\parallel}}$ erfüllen. Auflösen nach v_{\parallel} ergibt die Geschwindigkeit, die Ionen haben müssen, um mit einer Welle gegebener Frequenz in Wechselwirkung zu treten. Da aber nur im Bereich einiger thermischer Geschwindigkeiten überhaupt Teilchen vorliegen, kann die Absorption nur bei Frequenzen im Bereich der Gyrofrequenzen der Ionensorten erfolgen, und nicht bei allen Frequenzen gleichmäßig. Die Wirkung zahlreicher verschiedener Ionensorten auf das Spektrum wird in Cranmer (2000) untersucht.

Die Annahme eines starren Spektrums wäre nur dann gerechtfertigt, wenn es eine spektrale Transferfunktion \mathcal{F} gibt, die die Form des Spektrums mit Hilfe nichtlinearer Prozesse auf einer Zeitskala, die sogar gegenüber den Gyroperioden der Ionen kurz ist, aufrecht erhält. Dann würde die im Bereich der Gyrofrequenzen absorbierte Wellenenergie schnell genug aus dem Rest des Spektrums nachgeliefert werden. Da dies aber keine sinnvolle Annahme ist (für solche hochgradig nichtlineare Wellen wäre die quasilineare Theorie auch gar nicht anwendbar), muß davon ausgegangen werden, daß sich die Form des Spektrums ändern kann.

Wenn aufgrund der einfacheren Energiebilanz nach (2.74) an einem starren Spektrum festgehalten werden soll, ist es notwendig, die gesamte Welle - Teilchen - Wechselwirkung mit einem kleinen Faktor χ zu normieren. Um die Absorptionslänge der Wellen von 1 m auf z.B. 1000 km zu erhöhen, müßte dieser bei $\chi \approx 10^{-6}$ liegen. Eine entsprechende Simulationsrechnung wird in dieser Arbeit vorgestellt. In Tu und Marsch (2001) wird ebenfalls versucht, Simulationsrechnungen mit einem starren Spektrum durchzuführen, und die dabei auftretenden Probleme diskutiert.

Physikalisch bedeutet die Einführung des Faktors χ , daß die Welle - Teilchen - Wechselwirkung nun nicht mehr auf der schnellen Zeitskala der Gyrofrequenzen berechnet, sondern eine gemittelte, "effektive" Wirkung der Wellen auf das Plasma bestimmt wird. Die Verminderung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung um χ ist dabei jedoch durch die Wahl des Wertes von χ willkürlich.

Da es sich als notwendig herausstellt, eine variable Form des Spektrums zuzulassen, muß die Frequenz als zusätzliche Dimension in das Modell aufgenommen werden. Dies ist mit relativ geringem Aufwand möglich. Es ist lediglich notwendig, den Frequenzraum in Intervalle $\Delta\omega_i$ aufzuspalten und für jede Stelle ω_i eine Energiegleichung (2.72) zu lösen. Die Verlustterme $\left. \frac{\delta \mathcal{B}_{\omega_i}}{\delta t} \right|_{W.-T.}$ können genau wie $\left. \frac{\delta E_S}{\delta t} \right|_{W.-T.}$ durch Bestimmung des Gewinns der Teilchen an kinetischer Energie berechnet werden, wobei nur solche v_{\parallel} in die Integration auf der rechten Seite von (2.74) eingehen, deren Resonanzfrequenzen in das Frequenzintervall $\Delta\omega_i$ fallen.

2.4 Coulomb – Stöße

Die Coulomb – Stöße basieren auf der elektrostatischen Abstoßung von nahe aneinander vorbeifliegenden Ionen. In diesem Abschnitt wird ihre Wirkung auf die Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ mit Hilfe der Boltzmann – Gleichung berechnet. Zur Auswertung dieser Gleichung wird zunächst eine Fokker – Planck – Gleichung und schließlich das Landau – Stoßintegral für f hergeleitet. Anschließend sind daraus die Stoßterme $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ auf der rechten Seite der Vlasov – Gleichung (2.32) für reduzierte Verteilungsfunktionen F_k herzuleiten.

2.4.1 Das Landau – Stoßintegral für $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$

Die hier skizzierte Herleitung des Landau – Stoßintegrals orientiert sich eng an Montgomery und Tidman (1964) und Ljepojevic und Burgess (1990). Es werden die wesentlichen Schritte und Annahmen vorgestellt. Die ausführliche Rechnung kann in Montgomery und Tidman (1964) nachgelesen werden.

Die Boltzmann – Gleichung

Die Boltzmann – Gleichung stellt als Gleichung für eine Verteilungsfunktion f eine statistische Gleichung dar. Zu ihrer Herleitung wird von einem elementaren Stoßprozeß zwischen zwei Teilchen ausgegangen.

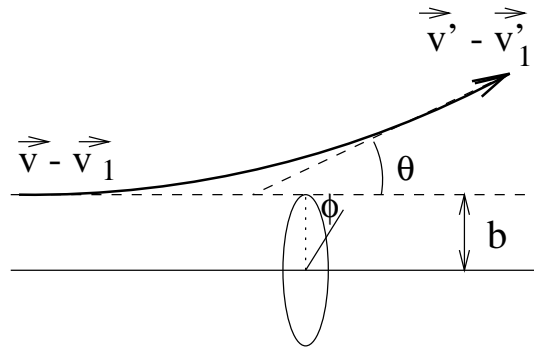


Abbildung 2.2: Die Geometrie eines Coulomb – Stoßes

Die Abbildung 2.2 stellt den Stoß eines Teilchens in einem Bezugssystem dar, das relativ zum Stoßpartner ruht. Der Index 1 steht für den Stoßpartner, ein “ ’ ” bezeichnet den Zustand nach dem Stoß. Der Winkel ϕ kennzeichnet die Orientierung der Bahnebene des Teilchens, θ den Ablenkwinkel infolge des Stoßes, und b ist der Stoßparameter.

Über den Stoßparameter b und den Winkel ϕ kann der differentielle Stoßquerschnitt $d\sigma$ definiert werden:

$$d\sigma = b db d\phi \quad (2.80)$$

Der Strom der Teilchen mit Geschwindigkeiten zwischen \vec{v} und $\vec{v} + d\vec{v}$ durch den differentiellen Stoßquerschnitt $d\sigma$ eines Stoßpartners beträgt:

$$d\sigma f(\vec{r}, \vec{v}, t) |\vec{v} - \vec{v}_1| d\vec{v} \quad (2.81)$$

Diese Teilchen werden aus dem Phasenraumvolumen $\vec{v} + d\vec{v}$ herausgestreut, die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ wird an dieser Stelle entsprechend vermindert. Der elementare Stoßprozeß nach Abbildung 2.2 ist reversibel, das Bild würde bis auf die Richtung des Geschwindigkeitsvektors genauso aussehen, wenn die Anfangsbedingung durch $-(\vec{v}' - \vec{v}'_1)$ und der Endzustand durch $-(\vec{v} - \vec{v}_1)$ gekennzeichnet wäre. Für gegebenes $|\vec{v} - \vec{v}_1|$ besteht daher ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen den Ausgangsbedingungen (b, ϕ) des Stoßes und der Richtung, in die das Teilchen gestreut wird. Daher kann der differentielle Stoßquerschnitt $d\sigma$ in (2.81) durch ein Raumwinkelement $d\Omega$ ersetzt werden:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.82)$$

Im Geschwindigkeitsintervall $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$ weisen die Stoßpartner eine Phasenraumdicke von $f_1(\vec{v}_1)$ auf. Durch Multiplikation von (2.81) mit $f_1(\vec{v}_1)$ und anschließender Integration über alle \vec{v}_1 ergibt sich daher die Wirkung aller Stöße mit differentiellem Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ auf die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$. Durch Integration über alle σ bzw. nach (2.82) über alle Raumwinkel Ω erhält man schließlich die Rate, mit der Teilchen aus dem Phasenraumintervall $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$ durch Stöße herausgestreut werden:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{out} = - \int d\vec{v}_1 \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\vec{v} - \vec{v}_1| f(\vec{v}) f_1(\vec{v}_1) \quad (2.83)$$

Die Stöße führen aber nicht ausschließlich zu einer Verminderung von $f(\vec{v})$. Es ist ebenso gut möglich, daß Teilchen in das Geschwindigkeitsintervall $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$ hineingestreut werden. Aufgrund der Umkehrbarkeit des Stoßprozesses kann dieser Beitrag leicht aufgeschrieben werden:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{in} = \int d\vec{v}'_1 \int \left(d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' |\vec{v}' - \vec{v}'_1| f(\vec{v}') f_1(\vec{v}'_1) \quad (2.84)$$

Die Beziehung zwischen differentiellem Streuquerschnitt und Raumwinkel Ω ist von der Umkehrung nicht betroffen, da nach wie vor derselbe Stoßmechanismus vorliegt:

$$\left(d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' = d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Die Impuls- und Energieerhaltung fordern:

$$|\vec{v} - \vec{v}_1| = |\vec{v}' - \vec{v}'_1|$$

Die Umkehrbarkeit erfordert ferner von den Volumenelementen im Geschwindigkeitsraum:

$$d\vec{v} d\vec{v}_1 = d\vec{v}' d\vec{v}'_1$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (2.84) und Addition mit (2.83) ergibt schließlich die gesuchte Wirkung der Stöße auf die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right) = \int d\vec{v}_1 \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\vec{v} - \vec{v}_1| (f(\vec{v}') f_1(\vec{v}'_1) - f(\vec{v}) f_1(\vec{v}_1)) \quad (2.85)$$

Die Beiträge der Stöße mit verschiedenen Teilchensorten j können leicht durch Summation über alle j berücksichtigt werden:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) = \sum_j \int d\vec{v}_j \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\vec{v} - \vec{v}_j| (f(\vec{v}') f_j(\vec{v}_j') - f(\vec{v}) f_j(\vec{v}_j)) \quad (2.86)$$

Damit wurde die Boltzmann – Gleichung gefunden. Da sie nur mit Hilfe einfacher statistischer Überlegungen und der Forderung nach Umkehrbarkeit des Einzelstoßes hergeleitet wurde, gilt sie allgemein für beliebige elastische Stoßprozesse. Um einen Stoßoperator für die Coulomb – Stöße herzuleiten, ist die Abhängigkeit zwischen $d\sigma$ und $d\Omega$ sowie zwischen $f(\vec{v}')$, $f_1(\vec{v}_1')$ und $f(\vec{v})$, $f_1(\vec{v}_1)$ für die Coulomb – Abstoßung zwischen geladenen Teilchen in (2.85) einzusetzen und die resultierende Gleichung auszuwerten.

Die Fokker - Planck – Gleichung

Für einen Coulomb – Stoß zwischen geladenen Teilchen kann $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ durch die Rutherford – Formel berechnet werden:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q^2 q_1^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 M_1^2 |\vec{g}|^4} \cdot \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad (2.87)$$

Dabei ist M_1 die reduzierte Masse

$$M_1 = \frac{mm_1}{m + m_1} \quad (2.88)$$

und \vec{g} der Vektor der Geschwindigkeitsdifferenz:

$$\vec{g} = \vec{v} - \vec{v}_1 \quad (2.89)$$

Der Winkel θ gibt die Richtungsänderung von \vec{g} infolge des Stoßes an, vgl. Abbildung 2.2. Er kann berechnet werden durch

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{\sqrt{b^2 + b_0^2}} \quad (2.90)$$

Dabei entspricht

$$b_0 = \frac{|qq_1|}{4\pi\epsilon_0 M_1 |\vec{g}|^2} \quad (2.91)$$

dem Stoßparameter, für den eine Ablenkung von $\theta = 90^\circ$ erfolgt. Für einen Stoß zwischen zwei Protonen und $|\vec{g}|^2 = v_{th}^2$ ergibt sich bei einer typischen koronalen Temperatur von 10^6 K:

$$b_0 = 3.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Bei einer Dichte von $N = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ beträgt der mittlere Teilchenabstand dagegen $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ und übertrifft das subatomar kleine b_0 um etwa 6 Zehnerpotenzen. Daher gilt für Stöße in der Korona:

$$b \gg b_0 \quad (2.92)$$

Nach (2.90) treten also nur sehr kleine Ablenkwinkel θ auf, auch die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{g} = \vec{g}' - \vec{g}$ ist dementsprechend klein. Ein Teilchen mit der Geschwindigkeit \vec{v} erfährt nur

eine kleine Geschwindigkeitsänderung $\Delta \vec{v}$, und aufgrund der Impulserhaltung gilt für seinen Stoßpartner:

$$\Delta \vec{v}_1 = -\frac{m}{m_1} \Delta \vec{v} \quad (2.93)$$

Die Kleinheit der $\Delta \vec{v}$ ermöglicht es, die Verteilungsfunktionen $f(\vec{v}') = f(\vec{v} + \Delta \vec{v})$ über die Endgeschwindigkeiten \vec{v}' durch eine Taylorentwicklung um die Ausgangsgeschwindigkeit \vec{v} zu bestimmen:

$$f(\vec{v}') = f(\vec{v}) + \Delta \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{v}) + \frac{1}{2}(\Delta \vec{v} \Delta \vec{v}) : \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}}(\vec{v}) \quad (2.94)$$

Der Tensoroperator : ist dabei definiert durch:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Sp}(\mathbf{AB}) \quad (2.95)$$

Die Anwendung dieser Reihenentwicklung auf f und f_j in der Boltzmann – Gleichung (2.85) ergibt unter Berücksichtigung von (2.93):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right) = & \sum_j \int |\vec{v} - \vec{v}_j| d\vec{v}_j \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \left(-\frac{m}{m_j} f \Delta \vec{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}_j} + \Delta \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{2} \frac{m^2}{m_j^2} f (\Delta \vec{v} \Delta \vec{v}) : \frac{\partial^2 f_j}{\partial \vec{v}_j \partial \vec{v}_j} \right. \\ & \left. - \frac{m}{m_j} (\Delta \vec{v} \Delta \vec{v}) : \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}_j} \right) + \frac{1}{2} f_j (\Delta \vec{v} \Delta \vec{v}) : \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Die $\Delta \vec{v}$ können mit Hilfe der reduzierten Masse M nach (2.88) durch $\Delta \vec{g}$ ausgedrückt werden:

$$\Delta \vec{v} = \frac{M_j}{m} \Delta \vec{g}, \quad \Delta \vec{v}_j = -\frac{M_j}{m_j} \Delta \vec{g} \quad (2.97)$$

Für $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ wird die Rutherford – Formel (2.87) eingesetzt. Um die Integration über alle Ω in (2.96) durchführen zu können, wird noch die Abhängigkeit der Änderung der Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta \vec{g}$ von den Winkeln (θ, ϕ) benötigt. In einem kartesischen Koordinatensystem, dessen x-Achse in Richtung von \vec{g} liegt, kann geschrieben werden:

$$\Delta \vec{g} = |\vec{g}|(1 - \cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) \quad (2.98)$$

Nach der Ersetzung der $\Delta \vec{v}$ in (2.96) durch $\Delta \vec{g}$ beschränkt sich die Abhängigkeit des Integranden vom Raumwinkelement $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ auf $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\Delta \vec{g}$. Mit Hilfe der Integrale

$$\{\Delta \vec{g}\} = |\vec{g}| \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta \vec{g} \quad (2.99)$$

$$\{\Delta \vec{g} \Delta \vec{g}\} = |\vec{g}| \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} (\Delta \vec{g} \Delta \vec{g}) \quad (2.100)$$

kann die Taylor - entwickelte Boltzmann – Gleichung (2.96) in kompakter Weise aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right) = & \sum_j \int d\vec{v}_j \left\{ \{\Delta \vec{g}\} \cdot \left(\frac{M_j}{m} f_j \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} - \frac{M_j}{m_j} f \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}_j} \right) \right. \\ & \left. + \{\Delta \vec{g} \Delta \vec{g}\} : \left(\frac{1}{2} \frac{M_j^2}{m_j^2} f \frac{\partial^2 f_j}{\partial \vec{v}_j \partial \vec{v}_j} - \frac{M_j^2}{mm_j} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}_j} + \frac{1}{2} \frac{M_j^2}{m^2} f_j \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Die Auswertung der Integrale (2.99), (2.100) ist problematisch, da die Rutherford - Formel (2.87) einen Faktor $\sin^4(\theta/2)$ im Nenner aufweist. Dadurch treten Integranden auf, bei denen $\sin(\theta/2)$ im Nenner steht, so daß sie für $\theta \rightarrow 0$ singular werden. Physikalisch bedeutet dies, daß es nicht zulässig ist, beliebig kleine Ablenkwinkel θ , d.h. beliebig große Stoßparameter b , zu berücksichtigen. Dies erscheint mit der unendlichen Reichweite der Coulomb – Kraft unvereinbar. Allerdings wird die Ladung eines Streuzentrums im Plasma auf der Längenskala der Debye – Länge abgeschirmt, so daß die Einführung eines maximalen b und damit minimalen Winkels θ_{min} doch erlaubt ist.

Durch Beschränkung des Integrationsbereichs in (2.99) und (2.100) auf $\theta_{min} \leq \theta \leq \pi$ lassen sich diese Integrale analytisch lösen. Die Abhängigkeit des Ergebnisses von θ_{min} kann durch den Vorfaktor

$$\Gamma_j = -\frac{q^2 q_j^2}{4\pi\epsilon_0^2 m^2} \ln(\sin(\theta_{min}/2)) \quad (2.102)$$

ausgedrückt werden. Nach einigen partiellen Integrationen erhält man schließlich aus der Boltzmann – Gleichung (2.101) das Landau – Stoßintegral:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) = \sum_j \Gamma_j L_j \quad (2.103)$$

Die Abhängigkeiten von \vec{v} und den Verteilungsfunktionen sind nun in den Stoßintegralen L_j enthalten:

$$L_j = -\frac{m+m_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(f \frac{\partial H_j}{\partial \vec{v}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : \left(f \frac{\partial^2 G_j}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}}\right) \quad (2.104)$$

Bei G_j und H_j handelt es sich um die “Rosenbluth – Potentiale”:

$$G_j = \int d\vec{v}_j |\vec{v} - \vec{v}_j| f_j(\vec{v}_j) \quad (2.105)$$

$$H_j = \int d\vec{v}_j \frac{f_j(\vec{v}_j)}{|\vec{v} - \vec{v}_j|} \quad (2.106)$$

Eine Gleichung dieser Form wird “Fokker - Planck – Gleichung” genannt. Die hier gewählte Form der Rosenbluth – Potentiale unterscheidet sich etwas von den in der Literatur (z.B. Montgomery und Tidman (1964)) üblichen Definitionen. Dort wird sowohl die Summation über alle Stoßpartner j als auch der Vorfaktor $\frac{m+m_j}{m_j}$ in die Rosenbluth – Potentiale hineingezogen, um das Stoßintegral mit zwei Potentialen H und G berechnen zu können. Hier wird die Summe über j nach (2.103) vor den gesamten Stoßoperator gezogen, damit die numerische Auswertung des Stoßintegrals für jeden Stoßpartner einzeln und unabhängig von den übrigen Partnern erfolgen kann. Dies erweist sich bei der Herleitung eines Stoßintegrals für reduzierte Verteilungsfunktionen als zweckmäßig. Der Faktor $\frac{m+m_j}{m_j}$ wird aus H_j herausgezogen, um bei dieser Herleitung Schreibarbeit zu sparen.

In der Gleichung (2.104) treten 4. Ableitungen des Rosenbluth – Potentials G_j und 2. Ableitungen von H_j auf. Nach Ljepojevic und Burgess (1990) ist es möglich, die Ordnung dieser Differentialgleichung mit Hilfe partieller Integrationen und den Eigenschaften der Rosenbluth – Potentiale G_j , H_j auf 2 in G_j und 1 in H_j zu senken:

$$L_j = 4\pi \frac{m}{m_j} f(\vec{v}) f_j(\vec{v}) + \left(1 - \frac{m}{m_j}\right) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : \frac{\partial^2 G_j}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \quad (2.107)$$

Der Vorfaktor Γ_j

Die Gleichung (2.103) stellt mit dem Landau – Stoßintegral L_j nach (2.107) den gesuchten Coulomb – Stoßoperator für die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ dar. Allerdings enthält der Vorfaktor Γ_j nach (2.102) noch den zunächst willkürlich eingeführten Parameter θ_{min} .

Wie schon erwähnt weist die Coulomb – Kraft zwar eine unendliche Reichweite auf. Im Plasma wird die Ladung eines Stoßpartners jedoch auf der Längenskala der Debye – Länge

$$\lambda_D = \left(\sum_j \frac{N_j q_j^2}{\epsilon_0 k_B T_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.108)$$

abgeschirmt. Daher können Stöße mit einem Stoßparameter größer als $b_{max} = \lambda_D$ vernachlässigt werden. Für den minimalen Ablenkwinkel θ_{min} ergibt das nach (2.90):

$$\tan \frac{\theta_{min}}{2} = \frac{b_0}{\lambda_D}$$

Da b_0 in der Korona von der Größenordnung 10^{-10} m ist und λ_D dagegen bei ungefähr 1 cm liegt, ist der Winkel θ_{min} sehr klein. Daher gilt mit der Definition (2.91) für b_0 :

$$\frac{\theta_{min,j}}{2} = \frac{|q q_j|}{4\pi\epsilon_0 M_j |\vec{g}|^2 \lambda_D} \quad (2.109)$$

Da der Wert für b_0 vom Stoßpartner j abhängig ist, gilt dasselbe auch für $\theta_{min,j}$. Das b_0 nach (2.91) weist aber auch eine Abhängigkeit von der Differenzgeschwindigkeit \vec{g} des betrachteten Teilchens und seines Stoßpartners auf. Diese Abhängigkeit ist hier nicht erwünscht, da für alle Stöße mit Stoßpartnern der Sorte j dasselbe $\theta_{min,j}$ verwendet werden soll. Nur so ist es möglich, in der Gleichung (2.103) den Vorfaktor Γ_j vor die Integrale L_j über den Geschwindigkeitsraum der Stoßpartner zu ziehen.

Da es nicht darauf ankommt, daß der maximale Stoßparameter b_{max} exakt gleich der Debye – Länge ist, kann $|\vec{g}|^2$ in geeigneter Weise abgeschätzt werden. Dies kann durch die Summe der thermischen Geschwindigkeiten der betrachteten Teilchen und ihrer Stoßpartner erfolgen:

$$|\vec{g}|^2 \approx 3k_B \left(\frac{T}{m} + \frac{T_j}{m_j} \right) \quad (2.110)$$

Nach Einsetzen dieser Näherung in (2.109) ergibt (2.102) unter Berücksichtigung von $\sin(\theta_{min}/2) \approx \theta_{min}/2$:

$$\Gamma_j = \frac{q^2 q_j^2}{4\pi\epsilon_0^2 m^2} \ln(\Lambda_j) \quad (2.111)$$

Dabei ist $\ln \Lambda_j$ der “Coulomb – Logarithmus” mit:

$$\Lambda_j = M_j \frac{12\pi\epsilon_0 \lambda_D}{|q q_j|} \left(\frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T_j}{m_j} \right) \quad (2.112)$$

Damit liegt ein Ausdruck für den Vorfaktor Γ_j vor, der nur noch von den Momenten der Verteilung f und des Stoßpartners f_j abhängt. Die mit der Wahl der thermischen Geschwindigkeiten

als Ersatz für die Differenzgeschwindigkeit $|\vec{g}|^2$ verbundene Willkür wirkt sich nur schwach auf den Wert von Γ_j aus, da er nur eine logarithmische Abhängigkeit von Λ_j aufweist.

Die Herleitung des Landau – Stoßintegrals (2.103) für $f(\vec{v})$ ist somit abgeschlossen. Da ein Stoßoperator für die rechte Seite der Vlasov – Gleichung (2.32) gesucht wird, besteht der nächste Schritt darin, mit Hilfe der Gleichung (2.103) ein Stoßintegral für die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ zu bestimmen.

2.4.2 Coulomb – Stoßoperator für reduzierte Verteilungen

Die Vlasov – Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ wurde durch Anwendung der Integraloperatoren I_k nach (2.16) auf die Vlasov – Gleichung (2.1) hergeleitet. Daher sind auch die Stoßintegrale für $F_k(v_{\parallel})$ durch Integration des Landau – Stoßintegrals (2.103) über die senkrechte Geschwindigkeitskoordinate zu bestimmen:

$$\left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{Coul.} = I_k \left[\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{Coul.} \right] \quad (2.113)$$

Da ein abgeschlossenes System von Gleichungen für die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ entwickelt werden soll, darf die rechte Seite dieser Gleichung nur noch von $F_k(v_{\parallel})$ und $F_{j,k}(v_{\parallel})$ abhängen, nicht aber von den ursprünglichen Verteilungsfunktionen $f(\vec{v})$, $f_j(\vec{v})$.

Die Anwendung von I_k auf das Stoßintegral L_j stellt sich als schwierig und mit erheblichem algebraischen Aufwand verbunden heraus. Die dazu notwendigen Rechnungen werden in Anhang A durchgeführt. An dieser Stelle werden die einzelnen Schritte zur Lösung der Gleichung (2.113) nur grob skizziert und die dabei gemachten Näherungen vorgestellt.

Die Problematik zeigt sich schon an der Struktur von L_j nach (2.107), dessen erster Summand ein Produkt von Verteilungsfunktionen enthält, das unter I_k mit der Definition (2.2) der reduzierten Verteilungsfunktionen unvereinbar ist. Die Darstellung (2.104) für L_j vermeidet zwar dieses Produkt, hängt aber immer noch von den Rosenbluth – Potentialen G_j und H_j ab.

Die Rosenbluth – Potentiale werden nach (2.105), (2.106) durch eine Integration über den Geschwindigkeitsraum der Stoßpartner bestimmt. Da $\int d^3\vec{v}_j = \int dv_{j,\parallel} \int d^2\vec{v}_{j,\perp}$ ist, erscheint die Anwendung der Definition (2.2) der $F_{j,k}$ auf den ersten Blick leicht möglich. Dies wird jedoch durch den Faktor $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{\pm 1} = ((v_{\parallel} - v_{j,\parallel})^2 + v_{\perp}^2 + v_{j,\perp}^2 + 2v_{\perp}v_{j,\perp} \cos \phi)^{\pm 1/2}$ verhindert. ϕ ist hier die Differenz der Gyrationwinkel von \vec{v} und \vec{v}_j . Damit die Definition der $F_{j,k}$ anwendbar ist, muß sich die Abhängigkeit von $v_{j,\perp}$ auf eine Potenz von $v_{j,\perp}^2$ beschränken. Um die Rosenbluth – Potentiale als Summe von $F_{j,k}$ darzustellen ist es daher notwendig, $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{\pm 1}$ durch ein Polynom in $v_{j,\perp}^2$ zu ersetzen. Es ist jedoch nicht möglich, $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{\pm 1}$ mit befriedigender Genauigkeit in eine entsprechende Potenzreihe zu entwickeln.

Es ist somit nicht möglich, die Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j mit Hilfe der reduzierten Verteilungen $F_{j,k}$ der Stoßpartner zu bestimmen. Da nur die $F_{j,k}$ modelliert werden sollen, sind die vollständigen Verteilungen $f_j(\vec{v}_j)$ nicht bekannt, so daß die Rosenbluth – Potentiale nicht auf der Basis der tatsächlichen Verteilungsfunktionen der Stoßpartner berechnet werden können.

Daher ist es notwendig, die Verteilungsfunktionen der Stoßpartner durch geeignete Modellverteilungen zu ersetzen und anschließend die Integrale über \vec{v}_j zu bestimmen. Dabei sollten die Modellverteilungen eine möglichst große Ähnlichkeit mit den wirklichen $f_j(\vec{v})$ aufweisen.

Da Verteilungsfunktionen im thermischen Gleichgewicht Maxwellisch sind und sich auch unter Nichtgleichgewichtsbedingungen nicht allzu weit von Maxwellverteilungen entfernen sollten, ist es ein naheliegender Gedanke, die $f_j(\vec{v})$ durch Bi-Maxwellverteilungen mit derselben Dichte N , Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D und Temperaturen T_{\parallel} , T_{\perp} zu ersetzen. Dabei stellt es jedoch heraus, daß die Integrale (2.105), (2.106) für G_j und H_j in elliptische Integrale übergehen, die analytisch nicht weiter ausgewertet werden können. Eine numerische Berechnung kommt wegen des damit verbundenen Rechenaufwands nicht in Frage.

Der Ansatz für $f_j(\vec{v})$ muß noch weiter vereinfacht werden, indem eine isotrope Maxwellverteilung mit der Dichte N , Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D und Temperatur $T = (T_{\parallel} + 2T_{\perp})/3$ in die Integrale (2.105), (2.106) eingesetzt wird. Nun ist eine analytische Lösung für gegebenes \vec{v} möglich.

Die Einführung reduzierter Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ nach Anwendung des Integraloperators I_k auf L_j setzt voraus, daß sich die Abhängigkeit der Ergebnisse von v_{\perp} auf eine Potenzreihe in v_{\perp}^2 beschränkt. Es ist möglich, die Ergebnisse für G_j und H_j entsprechend zu entwickeln. An dieser Stelle soll nur das Ergebnis genannt werden. Der Vorfaktor Γ_j hängt ausschließlich von Momenten der Verteilungsfunktionen ab und bleibt daher bei der Einführung der reduzierten Verteilungen unverändert. Für die Gleichung (2.113) ergibt sich letztendlich:

$$\left(\frac{\delta F_k}{\delta t}\right)_{Coul.} = \sum_j \Gamma_j \left(-\frac{m}{m_j} l_{j,k}^1 \frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} + \frac{m}{m_j} l_{j,k}^2 F_k + l_{j,k}^3 \frac{\partial^2 F_k}{\partial v_{\parallel}^2} + l_{j,k}^4 \frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} + l_{j,k}^5 F_k \right) \quad (2.114)$$

Die Parameter $l_{j,k}^h$ sind komplizierte Funktionen der Momente der Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ und $F_{j,k}(v_{\parallel})$. In Abhängigkeit von den Werten der Momente sind unterschiedliche Ansätze zu ihrer Berechnung anzuwenden. Daher soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden, ihre Definitionen aufzuschreiben. Die Bestimmung der $l_{j,k}^h$ wird ausführlich in Anhang A behandelt.

Mit der Berechnung der Coulomb – Stöße ist die Entwicklung der Vlasov – Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungsfunktionen abgeschlossen. Sämtliche Terme der Gleichungen für $F_0(v_{\parallel})$ und $F_1(v_{\parallel})$ lassen sich mit Hilfe dieser beiden reduzierten Verteilungen bestimmen, es liegt ein geschlossenes System zur Berechnung von F_0 und F_1 vor.

Schon bei der Diskussion der Flußröhrengometrie in Abschnitt 2.2.4 wurde darauf hingewiesen, daß die Einführung der reduzierten Verteilungsfunktionen nicht nur die Zahl der Geschwindigkeitskoordinaten, sondern auch der räumlichen Koordinaten von jeweils 3 auf 1, nämlich v_{\parallel} und s , verringerte. Dies konnte für die linke Seite der Vlasov – Gleichung (2.32) sofort gezeigt werden, während für die rechte Seite auf einen Beweis an späterer Stelle verwiesen wurde. Tatsächlich weisen weder die Gleichungen (2.49) und (2.50) für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung noch (2.114) für die Coulomb – Stöße eine explizite Ortsabhängigkeit auf. Zur Berechnung dieser Terme genügt die Kenntnis der $F_{j,k}(v_{\parallel})$ und ihrer Momente sowie des lokalen Wellenspektrums, sie hängen damit nur von den lokalen Plasmabedingungen ab.

Durch die Einführung der reduzierten Verteilungen F_k konnten die 7-dimensionalen Verteilungsfunktionen $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ durch 2 reduzierte Verteilungen $F_{k=0,1}(s, v_{\parallel}, t)$ ersetzt werden. Aus der Berechnung der Verteilungsfunktionen im vollen Orts- und Geschwindigkeitsraum wird durch die Beschränkung auf die magnetfeldparallelen Koordinaten s und v_{\parallel} eine Beschreibung der Teilchenbewegung entlang einer magnetischen Flußröhre. Die numerische Lösung der sowohl im Orts- als auch im Geschwindigkeitsraum 1-dimensionalen Gleichungen für F_0 und F_1

ist im Gegensatz zur Berechnung von f durchführbar. Im nächsten Abschnitt wird das dazu verwendete numerische Verfahren vorgestellt.

Kapitel 3

Das numerische Verfahren

Die Vlasov – Gleichungen (2.32) für die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_0(v)$ und $F_1(v)$ mit den Termen für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung nach (2.49), (2.50) und die Coulomb – Stöße nach (2.114) hängen nur von den Teilcheneigenschaften Masse m_j und Ladung q_j , den vorgegebenen Geometrieparametern $B(s)$, $A(s)$, $\psi(s)$ und $g(s)$, den $F_k(s, v)$, ihren Momenten Dichte N , Driftgeschwindigkeit v_D und thermischen Geschwindigkeiten V_{\parallel} , V_{\perp} sowie dem Wellenspektrum \mathcal{B}_{ω} ab. Die Momente der Verteilungen lassen sich nach (2.4) – (2.8) leicht durch Integration von F_0 und F_1 berechnen, und reduzierte Verteilungen $F_2(v)$ und höherer Ordnung werden mit Hilfe der Gaußschen Näherung (2.13) durch F_0 oder F_1 ersetzt. Die Bestimmung des elektrischen Feldes E_{\parallel} erfordert nach (2.37) bei gegebenem Elektronentemperaturprofil nur die Ionendichten N_j . Die Wellenenergiegleichung (2.72) weist ebenfalls nur Abhängigkeiten von den hier aufgelisteten Momenten auf.

Damit liegt ein geschlossenes Gleichungssystem zur Berechnung der reduzierten Verteilungen $F_0(v)$ und $F_1(v)$ vor. In diesem Kapitel wird anstelle von v_{\parallel} nur noch v geschrieben, da die senkrechte Geschwindigkeitskomponente v_{\perp} nicht mehr in den Gleichungen auftritt. Die Verteilungen $F_{j,k}$ anderer Ionensorten j gehen nicht explizit in die Berechnung der F_k ein, die verschiedenen Teilchensorten treten nur über ihre Momente in Wechselwirkung. Da es sich bei den Vlasov – Gleichungen (2.32) für $k = 0, 1$ um gekoppelte partielle Integro - Differentialgleichungen handelt, die durch ihre Abhängigkeit von den Momenten der Verteilungen hochgradig nichtlinear sind, ist keine analytische, sondern nur eine numerische Lösung möglich. In diesem Kapitel wird das dazu verwendete Verfahren vorgestellt.

3.1 Das Rechenfeld

Die numerische Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen (2.32) erfordert als ersten Schritt die Diskretisierung des durch die unabhängigen Veränderlichen s , v und t aufgespannten Raumes. Die Werte der F_k sind nur auf den so gebildeten Stützstellen (s_l, v_m, t_n) bekannt. Da die verschiedenen Ionensorten nur durch ihre Momente und nicht durch die $F_{j,k}$ gekoppelt sind, ist es dabei nicht notwendig, daß für verschiedene Ionen dieselbe Diskretisierung des Geschwindigkeitsraumes verwendet wird.

Das Ziel des numerischen Modells ist nicht die exakte Beschreibung der zeitlichen Entwicklungen der reduzierten Verteilungen F_k , sondern das Auffinden zeitlich stationärer Verteilungen F_k , die die Gleichung (2.32) lösen. Dadurch bekommt die Zeit t eine Sonderrolle. Im Prinzip könnte auch die zeitliche Ableitung in (2.32) gleich Null gesetzt und ausgehend von den Rändern des Rechenfeldes die F_k bestimmt werden. Auf diese Weise würde sich die Zahl der Dimensionen weiter von 3 auf 2 reduzieren. Ein solcher Ansatz stellt sich aber als nicht durchführbar heraus, die zeitliche Entwicklung des Plasmas muß berechnet werden. Bei dem hier zur Bestimmung der F_k verwendeten Verfahren erfordert jeder Zeitschritt $t \rightarrow t + \Delta t$ nur die Kenntnis der alten $F_k(s_l, v_m, t)$, nicht aber der gesamten Geschichte des Plasmas. Daher ist es nicht notwendig, diese alten Werte zu speichern. Wenn im folgenden vom „Rechenfeld“ die Rede ist, ist damit stets der (s, v) - Raum gemeint.

Die einfachste Wahl für die Stützstellen (s_l, v_m) wären äquidistante Intervalle Δs und Δv . Für eine Plasmasimulation in der Sonnenatmosphäre stellen diese aber keine gute Wahl dar. Wenn sich das Rechenfeld in räumlicher Richtung von der noch relativ kühlen Übergangszone in die heiße Korona erstreckt, dann nimmt die Druckskalenhöhe mit steigender Höhe stark zu. Da es in der Übergangszone außerdem einen starken Temperaturgradienten gibt, sind dort relativ kleine räumliche Schritte Δs notwendig. Andererseits ist die Skalenhöhe in der Korona groß und die Temperaturgradienten wesentlich geringer, so daß dort deutlich größere Δs möglich sind. Die kleinen Δs aus der Übergangszone würden die Zahl der s_l und damit den Rechenaufwand nur unnötig vergrößern. Demnach sollte Wahl der s_l dem zu erwartenden Temperaturprofil angepaßt werden.

Auch die Geschwindigkeitskoordinate sollte nicht in gleiche Intervalle Δv aufgeteilt werden. Da charakteristische Geschwindigkeiten wie die thermischen Geschwindigkeiten V_{\parallel} und V_{\perp} oder die Alfvéngeschwindigkeit v_A räumlich und zeitlich variabel sind, wird darauf verzichtet, die Werte für v auf eine dieser Geschwindigkeiten zu normieren, da ansonsten auch die Ableitungen dieser charakteristischen Geschwindigkeit in die Vlasov – Gleichung (2.32) eingehen. Da sich das Höhenprofil der Temperatur ausgehend von den Anfangsbedingungen der Simulation erheblich verändern kann, bietet es sich außerdem nicht an, für jede Höhe s_l eine der lokalen Anfangstemperatur entsprechende Einteilung des Geschwindigkeitsraumes vorzunehmen. Stattdessen wird eine von der Ortskoordinate unabhängige Diskretisierung v_m des v - Raumes vorgenommen.

Mit dieser Einteilung des Geschwindigkeitsraumes sollen sowohl die relativ niedrigen Temperaturen der Übergangszone als auch das heiße Plasma der Korona beschreibbar sein. Niedrige Temperaturen entsprechen niedrigen thermischen Geschwindigkeiten, so daß die Intervalle Δv im Bereich $v \approx 0$ hinreichend klein sein müssen, um die Verteilungsfunktionen aufzulösen und die Bestimmung ihrer Momente zu erlauben. Andererseits erfordert die Darstellung hoher Temperaturen einen ausreichend großen Wertebereich von v . Ein Temperaturanstieg von $T = 10^5$ K in der Übergangszone auf einen für schwere Ionen durchaus möglichen Wert von $T = 10^7$ K in der Korona entspricht einer Zunahme der thermischen Geschwindigkeit um einen Faktor 10. Wenn das Rechenfeld in der Korona wenigstens $3v_{th}$ umfassen soll, so entspricht dies in der Übergangszone $30v_{th}$. Die kleinen Δv aus dem Bereich $v \approx 0$ würden zu einer unnötig großen Zahl von Stellen v_m führen. Daher müssen die Δv zu größeren v hin wachsen. Dies ist problemlos möglich, da die Genauigkeit der Berechnung der Momente nicht vom Absolutwert von Δv abhängt, sondern von $\Delta v/v_{th}$. Die Zunahme der Δv mit v kann so gewählt werden, daß diese Größe stets bei einer vernünftigen Größenordnung von 10^{-1} liegt. Bei niedrigen Temperaturen stören die zu großen v gehörenden großen Δv nicht, da die Zahl der Teilchen mit diesen v

verschwindend gering ist. Die Berechnung der Momente wird durch sie nicht negativ beeinflusst.

Für die Abmessungen des Rechenfeldes und die Stützstellen werden folgende Bezeichnungen vereinbart. Das Rechenfeld umfaßt in s - Richtung N Stützstellen s_0, \dots, s_{N-1} . Ihre Abstände betragen

$$\Delta s_l := s_l - s_{l-1} \quad (3.1)$$

Die Diskretisierung des v - Raumes soll um $v = 0$ symmetrisch sein. Pro Vorzeichen von v umfaßt das Rechenfeld M_0 Stützstellen, hinzu kommt noch die Stelle $v = 0$. Insgesamt gibt es daher $M = 2 * M_0 + 1$ Stellen in v - Richtung. Aufgrund der Symmetrie gilt

$$v_{M_0} = 0 \quad (3.2)$$

und

$$|v_{M_0+m}| = |v_{M_0-m}|, m = 0, \dots, M_0 \quad (3.3)$$

Die F_k sollen auf allen Stellen $(s_l, v_m), l \in \{0, \dots, N-1\}, m \in \{0, M-1\}$ durch die Gleichung (2.32) berechnet werden. Randbedingungen werden außerhalb dieses Bereichs definiert. Die Skizze (3.1) verdeutlicht die Geometrie des Rechenfeldes.

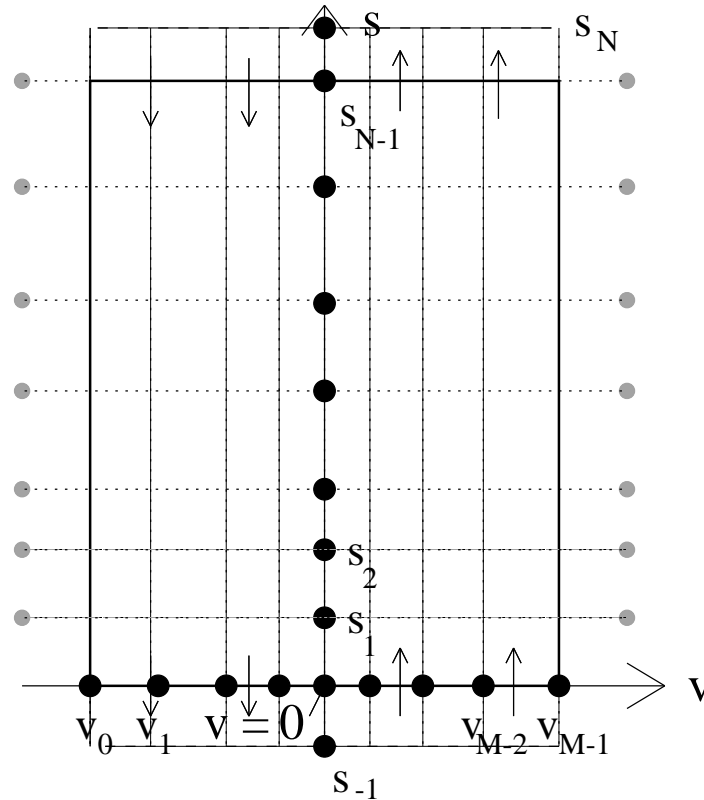


Abbildung 3.1: Die Geometrie des Rechenfeldes

An den Rändern des Rechenfeldes sind geeignete Randbedingungen vorzugeben. Aus der Gleichung (2.32) geht hervor, daß die Variation der F_k mit der Ortskoordinate s auf den Konvektionsterm beschränkt ist. Da der Flußröhrenquerschnitt A als Funktion von s fest vorgegeben ist, ist $\frac{\partial A}{\partial s}$ ein zeitlich konstanter Parameter. Die übrigen Differentialoperatoren in (2.32) wirken

nur auf die Geschwindigkeitskoordinate. Am unteren Rand strömen Teilchen mit positivem v in das Rechenfeld hinein, während solche mit negativem v das Rechenfeld verlassen. Daher werden am unteren Rand $F_k(v > 0)$ vorgegeben. Dies geschieht durch Vorgabe von F_k auf einer Höhe s_{-1} , die um Δs_0 unterhalb des s_0 des Rechenfeldes liegt. Für $F_k(v < 0)$ ist der Rand offen. Entsprechend sind am oberen Rand die $F_k(v < 0)$ durch $F_k(s = s_N)$ vorzugeben, während der Rand für $F_k(v > 0)$ offen ist. Die Ränder bezüglich der Geschwindigkeitskoordinate v treten nur bei der Berechnung von Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 F_k}{\partial v^2}$ in Erscheinung und werden in diesem Zusammenhang behandelt.

3.1.1 Die Berechnung der Momente

In die Berechnung der Coulomb – Stöße und Welle - Teilchen – Wechselwirkung gehen nicht nur die reduzierten Verteilungen F_k selber ein, sondern auch deren Momente. Es ist notwendig, die Dichte N , die Driftgeschwindigkeit v_D und die thermischen Geschwindigkeiten V_{\parallel} und V_{\perp} zu bestimmen. Zusätzlich soll auch der Wärmestrom q berechnet werden.

Die Berechnung der Momente aus den reduzierten Verteilungen F_k erfolgt durch die Gleichungen (2.4) – (2.12). Die numerische Bestimmung der Integrale über die Geschwindigkeitskoordinate v erfordert die Umwandlung in Summen über die Werte der reduzierten Verteilungen $F_k(v_m)$ an den Stützstellen v_m .

Aus den Gleichungen (2.4) – (2.12) geht hervor, daß lediglich Integrale der Form $\int v^j F_k(v) dv$ zu bestimmen sind, wobei für $k = 0$ $j = 0, 1, 2, 3$ und für $k = 1$ nur $j = 0, 1$ einzusetzen ist.

Alle Integrale dieser Form sollen auf identische Weise in Summen überführt werden. Im folgenden wird daher für $v^j F_k(v)$ einfach $f(v)$ geschrieben. Das Ziel besteht nun darin, geeignete Gewichte g_m zu finden, so daß gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \approx \sum_m g_m f(v_m) \quad (3.4)$$

Die Summation erstreckt sich über alle Stützstellen des v - Raumes, der Summationsindex m durchläuft also die Werte $0, \dots, M - 1$. Für äquidistante Stützstellen würde der einfachste Ansatz darin bestehen, $g_m = \Delta v$ zu setzen. Dies entspricht einer linearen Interpolation zwischen den Punkten des Rechenfeldes. Solch eine Momentenberechnung ist aber recht ungenau.

Daher wird ein quadratisches Interpolationspolynom verwendet, das auch für nichtäquidistante Stützstellen verwendbar ist. Hierzu werden 3 Stellen $f_{m-1} = f(v_m - \Delta v_m)$, $f_m = f(v_m)$ und $f_{m+1} = f(v_m + \Delta v_{m+1})$ betrachtet. Durch diese drei Stellen wird ein Interpolationspolynom $p(v) = a(v - v_m)^2 + b(v - v_m) + c$ gelegt. Das Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a , b und c kann leicht gelöst werden:

$$a = \frac{f_{m-1}\Delta v_{m+1} - f_m(\Delta v_m + \Delta v_{m+1}) + f_{m+1}\Delta v_m}{\Delta v_m \Delta v_{m+1} (\Delta v_m + \Delta v_{m+1})} \quad (3.5)$$

$$b = \frac{f_{m+1}\Delta v_m^2 + f_m(\Delta v_{m+1}^2 - \Delta v_m^2) - f_{m-1}\Delta v_{m+1}^2}{\Delta v_m \Delta v_{m+1} (\Delta v_m + \Delta v_{m+1})} \quad (3.6)$$

$$c = f_m \quad (3.7)$$

Die Integration des Interpolationspolynoms $p(v)$ über die beiden Intervalle Δv_m und Δv_{m+1} ist sehr leicht:

$$\int_{v_m - \Delta v_m}^{v_m + \Delta v_{m+1}} p(v) dv = \frac{1}{3}av^3 + \frac{1}{2}bv^2 + cv \Big|_{v=v_m - \Delta v_m}^{v_m + \Delta v_{m+1}}$$

Einsetzen der Koeffizienten a , b , c in (3.6) ergibt schließlich folgenden Näherungsausdruck für das Integral von $f(v)$:

$$\begin{aligned} \int_{v_m - \Delta v_m}^{v_m + \Delta v_{m+1}} f(v) dv \approx & \frac{(2\Delta v_m - \Delta v_{m+1})(\Delta v_m + \Delta v_{m+1})}{6\Delta v_m} f_{m-1} + \frac{(\Delta v_m + \Delta v_{m+1})^3}{6\Delta v_m \Delta v_{m+1}} f_m + \\ & \frac{(2\Delta v_{m+1} - \Delta v_m)(\Delta v_m + \Delta v_{m+1})}{6\Delta v_{m+1}} f_{m+1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für $\Delta v_m = \Delta v_{m+1}$ geht dieser Ausdruck in die bekannte Simpson – Formel über. Wenn der gesamte v - Raum durch solche Paare von Abständen $(\Delta v_m, \Delta v_{m+1})$ abgedeckt wird, können die Beiträge der einzelnen $f(v_m)$ zu dem Gesamtintegral über alle v und damit die gesuchten Gewichte g_m der Gleichung (3.4) bestimmt werden.

3.1.2 Die Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 F_k}{\partial v^2}$

Die Vlasov – Gleichung (2.32) hängt nicht nur von den Werten $F_k(v)$ der reduzierten Verteilungen ab, sondern auch von den Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial v}$ und $\frac{\partial^2 F_k}{\partial v^2}$. Die numerische Berechnung von Ableitungen erfolgt im allgemeinen durch geeignete Differenzenquotienten. Die Verallgemeinerung zentraler Differenzenquotienten auf nichtäquidistante Δv_m ergibt:

$$\frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m) = \frac{\Delta v_m^2 F_k(v_{m+1}) + (\Delta v_{m+1}^2 - \Delta v_m^2) F_k(v_m) - \Delta v_{m+1}^2 F_k(v_{m-1})}{\Delta v_m \Delta v_{m+1} (\Delta v_m + \Delta v_{m+1})} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial v^2}(v_m) = \frac{\Delta v_{m+1} F_k(v_{m-1}) - (\Delta v_m + \Delta v_{m+1}) F_k(v_m) + \Delta v_m F_k(v_{m+1})}{\Delta v_m \Delta v_{m+1} (\Delta v_m + \Delta v_{m+1})} \quad (3.10)$$

Diese Differenzenquotienten weisen einen Fehler 2. Ordnung auf. Wenn also das Verhältnis von Δv zu einer für die Verteilungsfunktion charakteristischen Geschwindigkeit wie v_{th} z.B. 0.1 beträgt, dann ergeben sie einen Fehler von etwa 1%. Der Fehler scheint damit nur gering zu sein, er kann aber dennoch erhebliche Auswirkungen auf die Genauigkeit und numerische Stabilität der Rechnung haben.

Besonders deutlich wird dies für die Coulomb – Stöße in einem dichten, stoßdominierten Plasma im thermischen Gleichgewicht. Unter dieser Bedingung sind alle Verteilungsfunktionen Maxwellisch, und die Coulomb – Stoßoperatoren $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ verschwinden. Nach (2.114) setzt sich der Coulomb – Stoßoperator aus verschiedenen Summanden zusammen, die auch unter Gleichgewichtsbedingungen Werte verschieden von Null haben. Sie heben sich nur bei der Summation gegenseitig auf. Die Fehler bei der Berechnung der Ableitungen der F_k nach v kompensieren sich in dieser Summe aber nicht gegenseitig, so daß ein von Null verschiedener Gesamtausdruck resultiert. Das Produkt aus dem Vorfaktor Γ_j und der in den Rosenbluth – Potentialen enthaltenen Dichte der Stoßpartner in (2.114) kann für ein stoßdominiertes Plasma sehr groß werden. Für Stöße zwischen Protonen in der Chromosphäre ergeben sich Werte der Ordnung $10^{17} \text{ m}^3/\text{s}^4$.

Dadurch kann das durch die Diskretisierungsfehler bedingte Nichtverschwinden des Coulomb – Stoßoperators zu einem nicht vernachlässigbaren $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ im thermischen Gleichgewicht führen, wodurch das Erreichen des Gleichgewichtszustandes verhindert und Verletzungen der Erhaltungsgrößen Dichte, Gesamtimpuls und Gesamtenergie des Plasmas verursacht werden.

Mit der Gaußschen Näherung (2.13) und der Annahme maxwellverteilter Stoßpartner bei der Berechnung der Coulomb – Stöße wurden bisher nur solche Annahmen bezüglich der F_k gemacht, die im thermischen Gleichgewicht exakt gelten. Dies sollte auch für die Berechnung der Ableitungen beibehalten werden, um die hier skizzierten Probleme zu vermeiden.

Für maxwellverteilte F_k gilt:

$$\ln F_k(v) = -\frac{(v - v_D)^2}{2V_{\parallel}^2} + c_k \quad (3.11)$$

Eine quadratische Gleichung kann mit Hilfe von Differenzenquotienten 2. Ordnung exakt differenziert werden. Daher bietet es sich an, nicht F_k numerisch zu differenzieren, sondern den Logarithmus $\ln F_k$, und dabei die Beziehung $\frac{\partial \ln F_k}{\partial v} = \frac{1}{F_k} \frac{\partial F_k}{\partial v}$ zu verwenden. Dies ergibt:

$$\frac{\partial F_k}{\partial v}(v) = F_k(v) \cdot \frac{\partial \ln F_k}{\partial v}(v) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial v^2}(v) = F_k(v) \cdot \left(\frac{\partial^2 \ln F_k}{\partial v^2}(v) + \left(\frac{\partial \ln F_k}{\partial v}(v) \right)^2 \right) \quad (3.13)$$

Die numerische Differentiation wie in (3.9), (3.10) liefert dann für die Ableitungen der Logarithmen:

$$\frac{\partial \ln F_k}{\partial v}(v_m) = \frac{\Delta v_m^2 \ln F_k(v_{m+1}) + (\Delta v_{m+1}^2 - \Delta v_m^2) \ln F_k(v_m) - \Delta v_{m+1}^2 \ln F_k(v_{m-1})}{\Delta v_m \Delta v_{m+1} (\Delta v_m + \Delta v_{m+1})} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 \ln F_k}{\partial v^2}(v_m) = \frac{\Delta v_{m+1} \ln F_k(v_{m-1}) - (\Delta v_m + \Delta v_{m+1}) \ln F_k(v_m) + \Delta v_m \ln F_k(v_{m+1})}{\Delta v_m \Delta v_{m+1} (\Delta v_m + \Delta v_{m+1})} \quad (3.15)$$

Damit wurde eine numerische Differentiation für die reduzierten Verteilungen F_k gefunden, die für maxwellverteilte F_k exakt gilt und daher im thermischen Gleichgewicht keine Diskretisierungsfehler aufweist.

Die Ränder des Rechenfeldes

In die Differenzenquotienten (3.14) und (3.15) zur Berechnung der Ableitungen an der Stelle v_m gehen nicht nur die Werte der F_k bei v_m ein, sondern auch an den benachbarten Stellen $v_{m\pm 1}$. An den Rändern v_0 und v_{M-1} des Rechenfeldes tritt hierbei das Problem auf, daß Werte jenseits des Randes des Rechenfeldes benötigt werden.

Diese Werte können nicht einfach fest vorgegeben werden, da sich die Dichte, Geschwindigkeit und Temperaturen T_{\parallel} , T_{\perp} auf einer festgelegten Höhe im Laufe der Simulation verändern können. Gerade bei großen $|v|$ von einigen v_{th} treten dann erhebliche Änderungen der $F_k(v)$ auf. Die Ränder v_0 und v_{M-1} entsprechen großen $|v|$, so daß aus der Anfangsbedingung stammende festgehaltene Randwerte $F_k(v_0)$ und $F_k(v_{M-1})$ zu erheblichen Verformungen der Verteilungsfunktionen am Rand des Rechenfeldes führen. Dies kann numerische Probleme verursachen und

ist physikalisch nicht zu rechtfertigen. Aus denselben Gründen ist es auch nicht möglich, am Rand einfach $F_k = 0$ zu setzen, es gibt immer einige Teilchen, die ein höheres $|v|$ aufweisen als der Wertebereich des Rechenfeldes umfaßt.

Eine von Neumannsche Randbedingung der Form $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ erweist sich ebenfalls als numerisch problematisch. Gute Erfahrungen wurden dagegen damit gemacht, die Punkte jenseits der Ränder durch die Extrapolation einer Maxwellverteilung zu berechnen.

Wenn $F_k(v)$ tatsächlich maxwellverteilt ist, dann gilt:

$$F(v) \propto \exp\left(-\frac{(v - v_D)^2}{2v_{th}^2}\right)$$

Für einen Quotienten $\frac{F_k(v+\Delta v)}{F_k(v)}$ folgt dann:

$$\frac{F_k(v + \Delta v)}{F_k(v)} = \exp\left(-\frac{\Delta v(2(v - v_D) + \Delta v)}{2v_{th}^2}\right) \quad (3.16)$$

Diese Beziehung erlaubt es, aus dem Wert $F_k(v_m)$ an einer Stützstelle den Wert $F_k(v_m + \Delta v)$ an einer Nachbarstelle abzuschätzen. Es ist zu beachten, daß hier nicht versucht wird, an die gesamte Verteilungsfunktion $F_k(v)$ eine Maxwellverteilung anzupassen. Es werden nur die Momente v_D und v_{th} genommen und lokal an der Stelle v_m die relative Änderung zwischen $F_k(v_m)$ und $F_k(v_m + \Delta v)$ berechnet, die sich für eine Maxwellverteilung ergeben würde.

Mit Hilfe der Gleichung (3.16) können die gesuchten Werte der F_k jenseits der Ränder des Rechenfeldes bestimmt werden. Hierzu werden die „Geisterstellen“ $v_{-1} = v_0 - \Delta v_0$ und $v_M = v_{M-1} + \Delta v_{M-2}$ eingeführt. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} F_k(v_{-1}) &= F_k(v_0) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta v_0(\Delta v_0 - 2(v_0 - v_D))}{2v_{th}^2}\right) \\ F_k(v_M) &= F_k(v_{M-1}) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta v_{M-2}(2(v_{M-1} - v_D) + \Delta v_{M-2})}{2v_{th}^2}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Durch diese Wahl der Randbedingungen werden numerische Probleme wie z.B. Instabilitäten vermieden. Sie sind auch physikalisch sinnvoll, da es in einem Plasma immer einige Teilchen außerhalb des durch das Rechenfeld abgedeckten Geschwindigkeitsbereichs geben kann. Auch die Extrapolation einer Maxwellverteilung stellt eine Näherung dar, die für maxwellverteilte F_k , d.h. im thermischen Gleichgewicht, exakt gilt.

Die Berechnung der Momente der Verteilungen erfordert, daß das Rechenfeld stets einige thermische Geschwindigkeiten umfaßt. Daher sollten die Randwerte $F_k(v)$ an den Grenzen des Geschwindigkeitsraumes im Vergleich zu den $F_k(v \approx 0)$ sehr klein sein, so daß die Wahl der Randbedingungen für große $|v|$ und die damit verbundenen Teilchenflüsse durch die Ränder nur einen vernachlässigbar geringen Einfluß auf die Momente der Verteilungen haben.

Erhaltung der Teilchenzahl

Eine grundlegende Eigenschaft der Ableitung $\frac{\partial F_k}{\partial v}$ einer Verteilungsfunktion ist das Verschwinden des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial v} dv = F_k|_{v=-\infty}^{\infty} = 0 \quad (3.18)$$

Die numerische Differentiation und die Integration bei der Momentenberechnung sollten diese Eigenschaft widerspiegeln, da es ansonsten zu einer Verletzung der Teilchenzahlerhaltung kommen kann.

Die zeitliche Variation der Teilchendichte N kann nach Gleichung (2.4) durch Integration der Entwicklungsgleichung (2.32) für F_0 über alle v berechnet werden. Die Spiegelkraft in (2.32) führt beispielsweise einen Term $\frac{\partial F_1}{\partial v}$ in die Gleichung ein, der bei der Integration über alle v verschwinden und so keinen Einfluß auf die Entwicklung der Teilchendichte haben sollte.

Wenn das numerische Verfahren die Gleichung (3.18) nur mit einem Fehler wiedergibt, führt dieser Fehler zu einer Verletzung der Teilchenzahlerhaltung. Da die Teilchendichte eine grundlegende Größe ist, die nach (2.5) – (2.12) in alle übrigen Momente eingeht, sollte ein solcher Fehler vermieden werden.

Die Momentenberechnung (3.4) wandelt das Integral (3.18) in folgende Summe um:

$$\sum_m g_m \frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m)$$

Durch die endliche Genauigkeit sowohl der numerischen Differentiation als auch Integration kann diese Summe von Null abweichen. Diese Gefahr besteht auch dann, wenn das F_k Maxwellisch ist und die Differentiation exakt gilt. Die Ordnung des Fehlers wird durch die Genauigkeit der numerischen Integration und Differentiation bestimmt. Wenn beide eine Genauigkeit 2. Ordnung aufweisen, ist er auch von 2. Ordnung.

Dieser Fehler ist zu korrigieren. Nach der Bestimmung der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial v}$ kann er leicht berechnet werden:

$$\delta N_k := \sum_m g_m \frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m) \quad (3.19)$$

Wenn von jedem $\frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m)$ ein Anteil an diesem Fehler abgezogen wird, kann das Verschwinden der Summe über die neuen $\frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m)$ erzwungen werden. Dabei stellt sich die Frage, wie diese Anteile gewichtet werden sollen. Die Werte von F_k und damit $\frac{\partial F_k}{\partial v}$ variieren als Funktion von m über etliche Größenordnungen, so daß nicht einfach von jedem $\frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m)$ ein Anteil $\frac{\delta N}{M}$ (M : Zahl der Stützstellen in v -Richtung) abgezogen werden darf. Es bietet sich an, die Korrektur mit dem Wert $F_k(v_m)$ zu gewichten.

Nach Bildung der Summe $N_k = \sum_m g_m F_k(v_m)$ (für $k = 0$ ist N_0 die Teilchendichte N) wird daher folgende Korrektur durchgeführt:

$$\frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m) \longrightarrow \frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m) - \frac{\delta N_k}{N_k} F_k(v_m) \quad (3.20)$$

Nach der Korrektur lautet die Summe (3.19): $\sum_m g_m (\frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m) - \frac{\delta N_k}{N_k} F_k(v_m)) = \sum_m g_m \frac{\partial F_k}{\partial v}(v_m) - \frac{\delta N_k}{N_k} \sum_m g_m F_k(v_m) = \delta N_k - \frac{\delta N_k}{N_k} N_k = 0$. Der Fehler ist jetzt also verschwunden.

Da der Fehler von 2. Ordnung ist, ist auch die Korrektur von 2. Ordnung. Daher wird die Genauigkeit der Ableitung trotz des mit der Korrektur verbundenen Hinzuaddierens eines willkürlichen Terms nicht beeinträchtigt.

3.1.3 Die Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial s}$

Die Vlasov – Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungen F_k enthält nicht nur Ableitungen der F_k nach v , sondern auch nach der Ortskoordinate s . $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ tritt im Konvektionsterm $v \frac{\partial F_k}{\partial s}$ auf.

Der einfachste Ansatz zur Berechnung von $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ ist ein zentraler Differenzenquotient, der für äquidistante Stützstellen s_l folgende Form aufweist:

$$\frac{\partial F_k}{\partial s} = \frac{F_k(s + \Delta s) - F_k(s - \Delta s)}{2\Delta s}$$

Er hat jedoch den Nachteil, daß zwischen benachbarten Stellen s_l Oszillationen auftreten können. Wenn beispielsweise $F_k(s_l - \Delta s)$ und $F_k(s_l + \Delta s)$ um denselben Summanden vergrößert sind, hat das keinen Einfluß auf die Berechnung der Ableitung $\frac{\partial F_k}{\partial s}(s_l)$, so daß der Fehler nicht korrigiert wird. Daher können die Schwankungen zwischen den benachbarten s_l im Laufe der Zeit immer größer werden, die Rechnung wird numerisch instabil. Das Problem tritt auch auf, wenn nichtäquidistante Δs_l und ein Differenzenquotient analog zu (3.9) verwendet wird. Die Abbildung 3.2 verdeutlicht die geometrischen Verhältnisse.

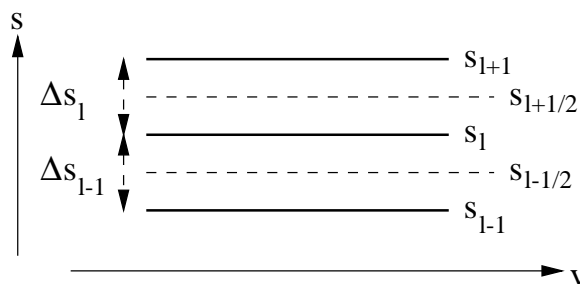


Abbildung 3.2: Die Geometrie zur Ableitung in s - Richtung

Das Verfahren kann dadurch stabilisiert werden, daß die Bewegungsrichtung der Teilchen im Rechenfeld bei der Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ berücksichtigt wird. Dazu werden “Upwind” - Differenzenquotienten verwendet. Es handelt sich dabei um einseitige Differenzenquotienten zwischen der Stelle s_l und ihrem Nachbarn entgegen der Bewegungsrichtung:

$$\frac{\partial F_k}{\partial s} = \begin{cases} \frac{F_k(s_l + \Delta s_l) - F_k(s_l)}{\Delta s_l} & , v < 0 \\ \frac{F_k(s_l) - F_k(s_l - \Delta s_{l-1})}{\Delta s_{l-1}} & , v > 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Dieser Ansatz ist physikalisch einleuchtend, da die Richtung, in der sich die Information über die F_k im Rechenfeld ausbreitet, mit der Richtung der Teilchenbewegung übereinstimmt. Er zeichnet sich außerdem durch große numerische Stabilität aus.

Bei ersten Simulationsrechnungen mit diesem Ansatz traten aber in einer sich aufweitenden Geometrie erhebliche Probleme mit der Erhaltung des Teilchenflusses

$$\phi(s) = A(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v F_0(s, v) dv \quad (3.22)$$

auf. Diese Rechnungen entsprechen den in Abschnitt 4.2 vorgestellten Tests auf Einhaltung der Erhaltungssätze. Im Laufe der Simulationszeit stellte sich zwar ein stationärer Zustand ein,

aber ϕ war als Funktion der Ortskoordinate s in dem Bereich, wo sich die Flußröhre aufweitet, keine Konstante, sondern zeigt eine “Welle”. Da sich die Dichte N im stationären Zustand nicht mehr ändert, stellt dies eine Verletzung der Kontinuitätsgleichung dar.

Das Problem konnte abgemildert werden, indem die Vlasov – Gleichung (2.32) für die F_k unter Ausnutzung der Unabhängigkeit des Flußröhrenquerschnitts $A(s)$ von der Zeit t und der Geschwindigkeit v in eine Gleichung für $(F_k \cdot A)$ umgewandelt wurde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(AF_k)}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial(AF_k)}{\partial s} + \left(\frac{q}{m} E_{\parallel} - g \cos \psi \right) \frac{\partial(AF_k)}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial F_{k+1}}{\partial v} + 2v_{\parallel} k F_k \right) = \\ A \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{W.-T.} + A \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{Coul.} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Auf diese Weise werden eine getrennte Differentiation von F_k und A nach s und die mit der Anwendung der Kettenregel verbundenen Diskretisierungsfehler vermieden. Auf der rechten Seite von (3.23) treten nur Ableitungen nach v auf, so daß der Faktor A vor die entsprechenden Terme gezogen werden kann.

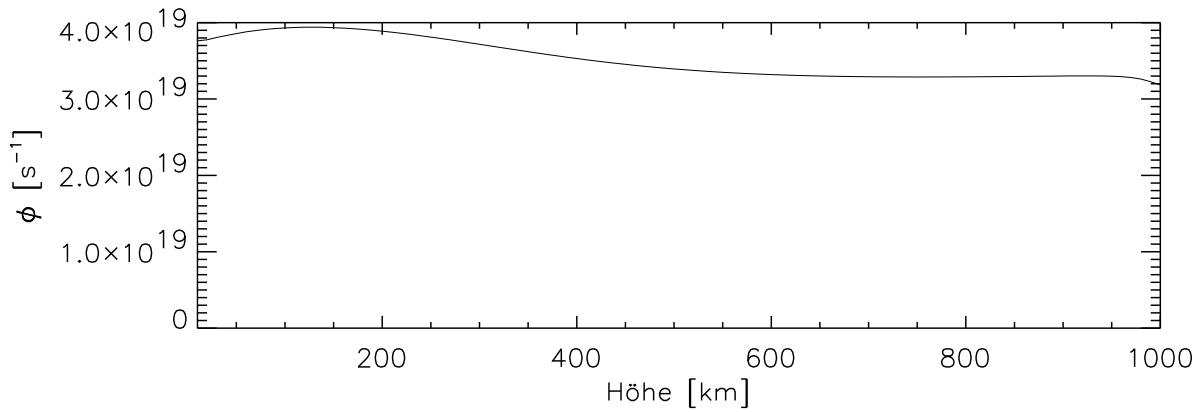


Abbildung 3.3: Verletzung der Flußerhaltung bei Verwendung von Upwind - Differenzenquotienten

Trotz dieser Maßnahme tritt weiterhin eine Verletzung des Teilchenflusses ϕ auf. Die Abbildung 3.3 stellt das Höhenprofil einer Testrechnung dar, die einen stationären Zustand erreicht hat. Die Rechnung wurde mit denselben Simulationsparametern durchgeführt wie die Tests auf Erhaltung des Teilchen- und Energieflusses in Abschnitt 4.2. Es ist eine deutliche Verletzung der Flußerhaltung zu erkennen.

Als Ursache konnte die mit dem Upwind - Ansatz (3.21) verbundene Asymmetrie zwischen positiven und negativen v identifiziert werden. Wenn nicht ϕ , sondern die Größe

$$\tilde{\phi} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} v (F_0(s_l) + F_0(s_{l+1})) dv + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} v (F_0(s_{l-1}) + F_0(s_l)) dv \quad (3.24)$$

als Funktion der Ortskoordinate s geplottet wird, wird $\tilde{\phi}$ exakt erhalten. In der Abbildung 3.2 entspricht ϕ einer Integration über alle v auf der Höhe s_l , während $\tilde{\phi}$ einer Integration entspricht, die für positive v bei $s_{l-1/2}$ verläuft und für negative v bei $s_{l+1/2}$.

Also ist der Upwind - Ansatz schuld an der Verletzung des Teilchenflusses. Ein zentraler Differenzenquotient weist das Problem mit der Asymmetrie nicht auf, aber er kann aufgrund seiner Instabilität nicht verwendet werden. Abhilfe kann nur durch Verwendung eines Differenzenquotienten höherer Ordnung geschaffen werden, der auch die Richtung der Teilchenbewegung berücksichtigt.

Gute Erfahrungen wurden mit der “Godunov first-order centred method” (GODc) gemacht, wie sie in Toro (1997) beschrieben wird. Dieser Ansatz basiert auf einer Taylorentwicklung der ersten Ableitung $\frac{\partial F_k}{\partial s}$. Ausgegangen wird von einem zentralen Differenzenquotienten $\frac{\partial F_k}{\partial s}(s_l)$ analog zu (3.9), der durch das Taylor - Glied erster Ordnung eine Korrektur in Upwind - Richtung erfährt:

$$\frac{\partial F_k}{\partial s}(s_l) = \frac{\partial F_k}{\partial s} \Big|_{\text{nach(3.9)}}(s_l) - v \Delta t \cdot \frac{\partial^2 F_k}{\partial s^2} \Big|_{\text{nach(3.10)}}(s_l) \quad (3.25)$$

Δt ist der Zeitschritt bei der numerischen Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32). Diese Korrektur stabilisiert das numerische Verfahren mit dem zentralen Differenzenquotienten, aber nur sie bringt eine Asymmetrie zwischen den positiven und negativen v mit sich. Bei der Berechnung von $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ tritt die Asymmetrie nur noch bei einem Term 1. Ordnung auf und nicht wie beim Upwind - Ansatz bei $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ selber und somit in der 0. Ordnung. Dementsprechend verringert sich der durch die Asymmetrie verursachte Fehler. Die Tests auf Erhaltungseigenschaften in Abschnitt 4.2 basieren auf diesem Ansatz. Die dort vorgestellten Höhenprofile weisen das in Abbildung 3.3 dargestellte Problem mit der Flußerhaltung nicht auf.

Mit (3.25) liegt daher ein numerisch stabiler und den Teilchenfluß erhaltender Differenzenquotient für $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ vor.

3.1.4 Anfangs- und Randbedingungen — Ein einfaches 1D - Flüssigkeitsmodell

Schon bei der Vorstellung des Rechenfeldes nach Abbildung 3.1 wurde auf die Notwendigkeit der Vorgabe von Randbedingungen hingewiesen. Am unteren Rand ist es notwendig, die Verteilung $F_{j,k}(v > 0)$ der Teilchen, die mit positiver Geschwindigkeit in das Rechenfeld hineinlaufen, vorzugeben. Bei der Modellierung des Plasmas in der Korona der Sonne kann der untere Rand in die relativ kühle und dichte Übergangszone gelegt werden. Dort wird das Plasma durch Coulomb – Stöße dominiert, so daß für die $F_{j,k}$ Maxwellverteilungen mit für die Übergangszone typischen Werten für die Dichte, Driftgeschwindigkeit und Temperatur vorgegeben werden können.

Wenn der obere Rand des Rechenfeldes in der Korona liegt, ist es schwieriger, für die dort mit $v < 0$ in das Rechenfeld hineinlaufenden Teilchen eine Randbedingung $F_{j,k}(v < 0)$ vorzugeben. Die Plasmamaparameter auf dieser Höhe sind zunächst unbekannt und müssen sich erst im Laufe der Simulationsrechnung einstellen. Durch die Wahl der oberen Randbedingung wird jedoch festgelegt, wieviele Teilchen mit welcher Geschwindigkeit in das Rechenfeld gelangen. Da sich die Momente N , v_D und T nach (2.4) – (2.7) durch Integration über alle v ergeben, wird durch die Vorgabe von $F_{j,k}(v < 0)$ am oberen Rand ein erheblicher Einfluß auf die Momentenbestimmung im oberen Bereich des Rechenfeldes ausgeübt. Die Driftgeschwindigkeit v_D reagiert

dabei aufgrund des Vorzeichenwechsels des Integranden in (2.5) besonders empfindlich auf eine willkürliche Vorgabe von $F_{j,k}(v < 0)$ am oberen Rand.

Die obere Randbedingung steuert dadurch den Teilchenfluß durch das Rechenfeld. Wenn zuviele Teilchen von oben in das Rechenfeld eintreten, führt dies nach (2.5) in seinem oberen Bereich zu einer Erniedrigung der Driftgeschwindigkeit und zu einer Erhöhung der Dichte. Wenn dagegen zuwenig sich nach unten bewegendes Teilchen vorgegeben werden, wird die Driftgeschwindigkeit erhöht und die Dichte erniedrigt. Der Ansatz eines exosphärischen Modells mit $F_{j,k}(v < 0) = 0$ erweist sich dadurch für Modelle der Korona als ungeeignet.

Um den Einfluß der oberen Randbedingung auf das Simulationsergebnis im Innern des Rechenfeldes möglichst gering zu halten, muß eine Verteilungsfunktion gefunden werden, die mit dem sich einstellenden stationären Endzustand möglichst konsistent ist. Außerdem werden auch im Innern des Rechenfeldes Anfangsbedingungen benötigt, die dem Endzustand ebenfalls möglichst nahe kommen sollten, um die benötigte Simulationszeit kurz zu halten. Die obere Randbedingung und die Anfangsbedingungen sollten ebenfalls konsistent sein, d.h. die obere Randbedingung entspricht der Anfangsbedingung dort und wird im Laufe der Simulationszeit festgehalten.

Damit besteht das Problem, daß schon vor Beginn der kinetischen Simulationsrechnung Modellergebnisse für das koronale Plasma benötigt werden. Abhilfe kann dadurch geschaffen werden, daß die Ergebnisse eines einfacheren Modells als Anfangs- und Randbedingung verwendet werden.

Dieses einfachere Modell ist ein 1 - dimensionales Flüssigkeitsmodell. Als solches liefert es keine Informationen über die Verteilungsfunktionen, sondern nur über makroskopische Parameter wie die Dichte N , Driftgeschwindigkeit v_D und Temperatur T . Für die Verteilungsfunktionen werden Maxwellverteilungen mit diesen Momenten angesetzt. Es wird nur eine Teilchensorte modelliert, deren Teilchenmasse m und -ladung q der mittleren Masse und Ladung der Ionen im kinetischen Modell entspricht. Die Teilchendichte entspricht der Gesamtdichte der Ionen.

Das Flüssigkeitsmodell basiert auf dem von Hu et al. (1997) zur Modellierung des Sonnenwindes verwendeten Modell. Durch die Beschränkung auf nur eine Teilchensorte wird es massiv vereinfacht, da sämtliche auf Coulomb – Stößen basierende Austauschsterme für Energie und Impuls zwischen den Teilchensorten entfallen. Die Grundgleichungen für N , v_D und T lauten dann:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} (N v_D A) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial v_D}{\partial t} = -v_D \frac{\partial v_D}{\partial s} - \frac{1}{mN} \frac{\partial (NkT)}{\partial s} + g + \frac{q}{m} E + h_\tau v_{ph} \left(1 - \frac{\alpha \cdot v_D}{v_{ph}} \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v_D \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{2}{3} \frac{T}{A} \frac{\partial (v_D A)}{\partial s} - \frac{2}{3} \frac{1}{NkA} \frac{\partial (qA)}{\partial s} - \frac{2}{3} \frac{1}{Nk} \frac{\delta E_S}{\delta t} \Big|_{W.-T.} \quad (3.28)$$

Der Wärmestrom q wird durch das klassische $T^{5/2}$ - Gesetz der Wärmeleitung berechnet:

$$q = -\frac{\kappa_0}{\Lambda} T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \kappa_0 = 7.556 \cdot 10^{-12} \text{ K}^{-7/2} \text{ W m}^{-1} \quad (3.29)$$

Λ ist der Coulomb – Logarithmus nach (2.112). Der Zahlenwert für κ_0 ergibt sich nach Baumjohann und Treumann (1996) für Protonenstöße.

Der jeweils letzte Term der Impuls- und Energiegleichung beruht auf der Beschleunigung bzw. Heizung durch die Wellen. Der Beschleunigungsterm wird durch das Integral $\int v (\frac{\delta F_0}{\delta v})_{W.-T.} dv$ mit dem $(\frac{\delta F_0}{\delta v})_{W.-T.}$ nach (2.49) bestimmt und der Energieaustausch $\frac{\delta E_S}{\delta t}|_{W.-T.}$ zwischen Wellen und Teilchen durch (2.74).

Da hier ein Flüssigkeitsmodell entwickelt wird, gibt es keine Informationen über die Verteilungsfunktionen F_k . Daher werden Maxwellverteilungen mit den Momenten N , v_D und T in die Integrale eingesetzt. Dadurch ergibt sich der Beschleunigungsterm in (3.27) und der Energieaustausch zwischen Wellen und Teilchen:

$$\frac{\delta E_S}{\delta t} \Big|_{W.-T.} = -mN h_\tau v_{ph}^2 \left(1 - \frac{\alpha \cdot v_D}{v_{ph}} \right) \quad (3.30)$$

Die Hilfsgröße h_τ ist dabei definiert durch:

$$h_\tau = (\alpha - 1) \frac{2\mu_0}{B^2} \cdot E_S \cdot \Omega \pi \left(\frac{\omega_L}{\Omega} \right)^{\alpha-1} \quad (3.31)$$

Die Wellenenergie E_S wird mit Hilfe der Gleichung (2.72) berechnet. Für das Spektrum wird ein starres Potenzspektrum nach (2.75) mit Gesamtenergie E_S nach (2.76), Spektralkoeffizient α und unterer Grenzfrequenz ω_L angesetzt. Für die "Stoßzeit" τ der Welle - Teilchen - Wechselwirkung wird der Ausdruck (2.78) für das Potenzspektrum verwendet. Bei der Berechnung des Impuls- und Energietransfers durch die Wellen ergeben sich dann die hier verwendeten Ausdrücke mit der Hilfsgröße h_τ .

Schon in Abschnitt 2.3.3 wurde festgestellt, daß der Ansatz eines starren Spektrums problematisch ist, da er zur Absorption der Wellen auf einer der Ionenträgheitslänge vergleichbaren Skala führt, die in der Korona etwa 1 m beträgt. Daher ist es notwendig, die gesamte Berechnung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung mit einem Vorfaktor χ zu versehen, der den Wert $\chi = 10^{-6}$ aufweisen muß, um die Absorptionslänge der Wellen auf eine vernünftige Größenordnung von 1000 km zu vergrößern.

Physikalisch kann dies dadurch gerechtfertigt werden, daß nicht das gesamte Spektrum eine Resonanzbedingung erfüllt, sondern nur bestimmte Frequenzbereiche. Ein spektraler Transfer von Wellenenergie durch nichtlineare Prozesse kann dabei nicht beliebig schnell ablaufen, so daß es einen großen Vorrat an Wellenenergie gibt, der nur langsam abgebaut wird.

Das Ziel des hier verwendeten Flüssigkeitsmodells ist es nicht, eine genaue Modellierung des koronalen Plasmas durchzuführen. Es sollen lediglich mit dem stationären Endzustand des kinetischen Modells hinreichend konsistente Werte für (N, v_D, T) gefunden werden. Daher ist der zwar physikalisch richtigere, aber wesentlich kompliziertere und auf weiteren Annahmen basierende Versuch, ein variables Spektrum für das Flüssigkeitsmodell zu verwenden, vom Aufwand her nicht zu rechtfertigen.

Mit den Gleichungen (3.26) – (3.28) und der Wellenenergiegleichung (2.72) liegt ein abgeschlossenes System zur Berechnung von (N, v_D, T, E_S) vor. Es unterscheidet sich von dem Modell von Hu et al. (1997) in der vereinfachenden Beschränkung auf eine Teilchensorte und in dem Heizungsterm (3.30), der anstelle einer parametrischen Heizung verwendet wird.

Vor der numerischen Lösung dieses Gleichungssystems ist die Ortskoordinate s in geeigneter Weise zu diskretisieren. Da die Ergebnisse (N, v_D, T) als Anfangsbedingungen für das kinetische

Modell verwendet werden sollen, müssen die räumlichen Stützstellen s_l mit denen des kinetischen Modells übereinstimmen. Der obere Rand des Rechenfeldes entspricht der Stelle s_N in Abbildung 3.1.

Die Lösung der Gleichungen erfolgt durch zeitliche Relaxation nach dem in Hu et al. (1997) beschriebenen impliziten Verfahren. Am unteren Rand werden die Werte für die Dichte N und Temperatur T vorgegeben, am oberen Rand liegen offene Randbedingungen vor. Die Driftgeschwindigkeit v_D kann sich im Rechenfeld selbstkonsistent einstellen, am unteren Rand erfolgt keine Vorgabe von v_D , sondern nur eine von Neumannsche Randbedingung $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$ für den Teilchenfluß ϕ . Ausgehend von einer willkürlichen, aber durch die Wahl eines barometrischen Dichteverlaufs konsistenten Anfangsbedingung werden solange Zeitschritte $t \rightarrow t + \Delta t$ berechnet, bis ein stationärer Endzustand erreicht ist.

Dieses Modell liefert für jede Höhe s_l einen Satz (N, v_D, T) von Momenten der reduzierten Verteilungsfunktionen $F_{k=0,1}$. Durch den Ansatz einer isotropen Maxwellverteilung können nun Anfangs- bzw. Randwerte für alle $F_k(s_l, v_m)$ im Rechenfeld vorgegeben werden.

3.2 Die Numerische Lösung der Vlasov – Gleichung

Mit den in den vorangehenden Abschnitten vorgestellten Methoden zur Berechnung der Momente und der Ableitungen der reduzierten Verteilungen $F_k(s, v)$, der vorgegebenen Geometrie $(A(s), \psi(s), g(s))$ und der Gleichung (2.37) für das elektrische Feld können alle Terme der Vlasov – Gleichung (2.32) für jeden Punkt (s_l, v_m) im Innern des Rechenfeldes berechnet werden, wobei nur die F_k auf den diskreten Stellen (s_l, v_m) nach Abbildung 3.1 in die Rechnung eingehen. Damit liegt ein geschlossenes System von Gleichungen zur Berechnung der $F_k(s_l, v_m)$ vor.

Die Vlasov – Gleichung (2.32) beschreibt die zeitliche Entwicklung der F_k . Von Interesse ist aber weniger das genaue Nachvollziehen des zeitlichen Verlaufs der Plasmabedingungen aus einem Anfangszustand heraus als vielmehr ein sich in Abhängigkeit von den Randbedingungen einstellender stationärer Zustand, d.h. ein Zustand, in dem die zeitlichen Ableitungen der F_k verschwinden.

3.2.1 Kann Stationarität vorausgesetzt werden?

Da das Ziel das Auffinden einer Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32) ist, bei der die zeitlichen Ableitungen der F_k verschwinden, ist es eine naheliegende Idee, von vorneherein nach einer stationären Lösung zu suchen und die Terme $\frac{\partial F_k}{\partial t}$ gleich 0 zu setzen. Durch diese Elimination der Zeitkoordinate könnte der Rechenaufwand deutlich verringert werden.

Die Vlasov – Gleichung (2.32) enthält nur im Konvektionsterm $v \frac{\partial F_k}{\partial s}$ eine räumliche Ableitung der reduzierten Verteilungen nach der Ortskoordinate, sie ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in s . Sie weist damit genau dieselbe Abhängigkeit von der Ortskoordinate auf wie von der Zeitkoordinate. Daher könnte sie nach $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ aufgelöst werden und anschließend ausgehend von einer Randbedingung genauso gelöst werden wie eine zeitabhängige Rechnung mit einer Anfangsbedingung.

Da der Konvektionsterm $v \frac{\partial F_k}{\partial s}$ in (2.32) einen Faktor v aufweist, ist die stationäre Gleichung (2.32) beim Auflösen nach $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ aber durch v zu dividieren:

$$\frac{\partial F_k}{\partial s} = \frac{1}{v} \left\{ -\left(\frac{q}{m} E_{\parallel} - g \cos \psi\right) \frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} - \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial F_{k+1}}{\partial v} + 2v_{\parallel} (k+1) F_k \right) + \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{W.-T.} + \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{Coul.} \right\} \quad (3.32)$$

Die Grundidee besteht darin, ausgehend von einem Rand räumliche Schritte der Art $F_k(s + \Delta s) = F_k(s) + \Delta s \cdot \frac{\partial F_k}{\partial s}$ zu berechnen und so das gesamte Rechenfeld zu durchlaufen. Dazu bietet sich der untere Rand an, da er durch eine Vorgabe von N , v_D und T definiert werden kann und anders als der obere Rand keine Annahmen über Simulationsergebnisse erfordert. Die Durchführung einer solchen Rechnung ist jedoch nicht trivial. Der Vorfaktor $\frac{1}{v}$ verursacht gleich zwei Probleme:

Als erstes ist die Singularität an der Stelle $v = 0$ zu nennen. An dieser Stelle kann die Gleichung (3.32) nicht ausgewertet werden. Abhilfe könnte dadurch geschaffen werden, daß nicht das Rechenfeld nach Abbildung 3.1 mit seinem Gitterpunkt $v_m = 0$ verwendet wird, sondern eines, das keinen Gitterpunkt $v_m = 0$ aufweist. Die Stelle $v = 0$ könnte in der Mitte zwischen zwei Punkten liegen. Dennoch können im Bereich kleiner v immer noch numerische Probleme durch den relativ großen Faktor $\frac{1}{v}$ auftreten.

Das zweite Problem ist noch viel schwerwiegender. Es besteht letztlich in dem Vorzeichen von v in Verbindung mit den Diffusionsoperatoren der Welle - Teilchen - Wechselwirkung und der Coulomb - Stöße. Dies soll am Beispiel der Coulomb - Stöße erläutert werden.

Die Coulomb - Stoßterme (2.114) sind Diffusionsoperatoren, die dazu tendieren, jede beliebige Ausgangsverteilung im Laufe der Zeit in eine Maxwellverteilung zu überführen. Es ist aber nicht möglich, ausgehend von einer Maxwellverteilung zu entscheiden, wie die Ausgangsverteilung ausgesehen hat. Der Versuch, dies mit Hilfe von (2.114) auszurechnen, führt zu einer numerischen Instabilität. Dies ist einleuchtend, da kleine Abweichungen der Verteilungsfunktion von einer Maxwellverteilung im Laufe der Zeit abgebaut werden und daher zu einem früheren Zeitpunkt größer gewesen sein müssen. Wenn nun versucht wird, die Diffusion in negativer Zeitrichtung zu berechnen, werden Abweichungen von der Maxwellverteilung also vergrößert. Dies gilt für die realen, zu berechnenden Abweichungen, aber auch für numerische Fehler. Damit werden die Fehler vergrößert, so daß die Rechnung instabil wird. Die Diffusionsoperatoren für die Coulomb - Stöße können prinzipiell nur in positiver Zeitrichtung ausgewertet werden.

Ein negatives Vorzeichen $\frac{1}{v}$, $v < 0$, vor dem Coulomb - Stoßoperator entspricht aber gerade einer Rechnung in negativer Zeitrichtung. Daher ist es für positive v möglich, vom unteren Rand ausgehend durch Schritte der Form $F_k(s + \Delta s) = F_k(s) + \Delta s \cdot \frac{\partial F_k}{\partial s}$ die F_k im Innern des Rechenfeldes zu berechnen, da auch Δs positiv ist. Für negative v ist dieser Ansatz aber nicht durchführbar. Eine Lösung ist für sie nur dadurch möglich, daß auch Δs negativ wird.

Zur Berechnung der F_k im Innern des Rechenfeldes nach (3.32) ist es demnach notwendig, daß die Richtung der räumlichen Integration mit der Richtung der Teilchenbewegung zusammenfällt und damit der zeitlichen Entwicklung des Plasmas folgt. Für $v > 0$ muß die Integration vom unteren Rand des Rechenfeldes ausgehend nach oben erfolgen, für $v < 0$ dagegen vom oberen Rand nach unten. Diese grundsätzlich unterschiedlichen Vorgehensweisen je nach Vorzeichen von v erfordern eine Aufspaltung des Rechenfeldes in zwei Teile $v > 0$ und $v < 0$.

Damit stößt der Ansatz, die Stationarität vorauszusetzen und so die Rechnung zu vereinfachen, auf eine erhebliche Schwierigkeit. Man könnte versuchen, vom unteren Rand ausgehend die F_k im gesamten Rechenfeld zu bestimmen. Dabei tritt jedoch das Problem auf, daß es zwar möglich ist, die $F_k(s_1, v_m > 0)$ ausgehend von der unteren Randbedingung $F_k(s_0, v_m)$ zu bestimmen, daß für die $F_k(s_1, v_m < 0)$ aber keine Informationen vorliegen. Deshalb ist es nicht möglich, die Momente der F_k mit Hilfe der Gleichungen (2.4) – (2.7) durch Integration über alle v auf der Höhe s_1 zu bestimmen. Damit kann die Gleichung (3.32) für die $F_k(s_1, v_m > 0)$ nicht ausgewertet werden, eine Berechnung aller $F_k(s_l, v_m > 0)$ ausgehend vom unteren Rand ist nicht möglich. Die Abbildung 3.4 verdeutlicht die Geometrie des Problems.

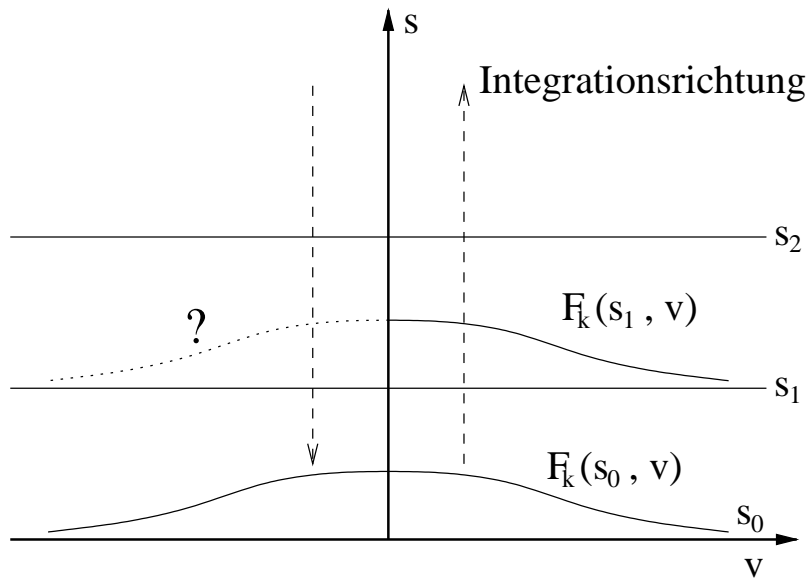


Abbildung 3.4: Zur Geometrie des Versuchs, die $F_k(s_l, v_m > 0)$ ausgehend vom unteren Rand zu bestimmen.

Dasselbe gilt auch für eine Bestimmung der $F_k(s_l, v_m < 0)$ ausgehend vom oberen Rand. Um den stationären Ansatz zu retten könnte versucht werden, die fehlende Hälfte der Verteilungsfunktion durch geeignete Annahmen abzuschätzen. Beim Schritt von $F_k(s_1, v_m > 0)$ nach $F_k(s_2, v_m > 0)$ könnten die zur Momentenbestimmung fehlenden $F_k(s_1, v_m < 0)$ z.B. durch Spiegelung der Verteilungsfunktion für $v > 0$ an $v = 0$ oder $v = v_D$ bestimmt werden. Doch ein solcher Ansatz ist inkonsistent.

Es wird diffusen Effekten wie den Coulomb – Stößen unterstellt, daß sie für $v < 0$ denselben Unterschied zwischen $F_k(s_1)$ und $F_k(s_0)$ verursachen wie für $v > 0$. Ein Teilchen mit positiver Geschwindigkeit erreicht erst s_0 und später s_1 , während sich eines mit negativer Geschwindigkeit von s_1 nach s_0 bewegt. Die Coulomb – Stöße versuchen, $F_k(s_1, v_m > 0)$ näher an eine Maxwellverteilung zu bringen als $F_k(s_0, v_m > 0)$. Dagegen sollte $F_k(s_0, v_m < 0)$ näher an einer Maxwellverteilung sein als $F_k(s_1, v_m < 0)$. Durch den Ansatz einer Bestimmung von $F_k(s_l, v_m < 0)$ aus $F_k(s_l, v_m > 0)$ ist dies gerade nicht der Fall, $F_k(s_0, v_m < 0)$ ist weiter von der Maxwellverteilung entfernt als $F_k(s_1, v_m < 0)$.

Eine analoge Argumentation gilt auch für die Heizung und Beschleunigung der Teilchen durch die Welle - Teilchen – Wechselwirkung. Diese Inkonsistenz führt dann zu völlig falschen Abschätzungen der $F_k(s_l, v_m < 0)$ und damit auch zu falschen Werten der Momente auf der Höhe

s_l . Daher ist es nicht möglich, die $F_k(s_l, v_m)$ für die Hälfte $v > 0$ des Rechenfeldes ausgehend nur vom unteren Rand zu bestimmen, oder nur vom oberen Rand aus die $F_k(s_l, v_m < 0)$.

3.2.2 Lösung durch zeitliche Relaxation

Da die Stationarität der gesuchten Lösungen F_k der Vlasov – Gleichung (2.32) nicht als Voraussetzung in die Rechnung eingehen kann, ist es notwendig, die zeitliche Entwicklung des Modellplasmas ausgehend von einem Anfangszustand zu berechnen. Als Anfangsbedingung dienen wie in Abschnitt 3.1.4 beschrieben die Ergebnisse eines einfachen 1D – Flüssigkeitsmodells.

Die Simulation des Relaxationsvorgangs von der Anfangsbedingung in einen stationären Endzustand erfolgt durch sukzessive Berechnung einzelner Zeitschritte Δt . Jeder dieser Zeitschritte beinhaltet die Berechnung der Änderung der reduzierten Verteilungen nach (2.32) und der Wellenenergie nach (2.72) sowie die Aktualisierung der Momente der F_k nach (2.4) – (2.7).

Die Gleichungen (2.32) und (2.72) liefern zum Zeitpunkt t die zeitlichen Ableitungen von F_k und der Wellenenergie \mathcal{B}_ω auf der Basis der momentanen Werte dieser Größen. Mit Hilfe der Ableitungen ist der Zustand $F_k(t + \Delta t)$ zu bestimmen.

Der einfachste Ansatz hierzu ist das Euler – Verfahren:

$$F_k(t + \Delta t) = F_k(t) + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} F_k(t) \quad (3.33)$$

Der Vorteil des Euler – Verfahrens ist seine Einfachheit. Zum Zeitpunkt t sind alle F_k , ihre Ableitungen und Momente bekannt, so daß das $\frac{\partial}{\partial t} F_k(t)$ nach Gleichung (2.32) leicht bestimmt werden kann. Die Berechnung der $F_k(t + \Delta t)$ erfolgt für alle Stützstellen des Rechenfeldes unabhängig voneinander.

Das Euler – Verfahren hat aber den Nachteil, daß es für zu große Δt instabil wird. Das Δt muß eine von der Entwicklungsgleichung für F_k abhängige Courant – Friedrich – Levi – Bedingung (kurz: CFL – Bedingung) einhalten. Für den Konvektionsterm $v \frac{\partial F_k}{\partial s}$ lautet diese beispielsweise:

$$\frac{v \Delta t}{\Delta s} < 1 \quad (3.34)$$

Andere Terme der Gleichung (2.32) können noch erheblich schärfere Einschränkungen für das Δt mit sich bringen. Ein extremes Beispiel ist der Coulomb – Stoßoperator. Nach Baumjohann und Treumann (1996) kann die Coulomb – Stoßfrequenz ν mit Teilchen der Sorte j berechnet werden durch:

$$\nu = N_j \cdot \left(1 + \frac{m}{m_j} \right) \cdot \frac{q^2 q_j^2 \ln \Lambda}{6 \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m^2 v_{j,th}^3} \quad (3.35)$$

Die CFL – Bedingung für die Coulomb – Stöße ist dann von der Form:

$$\nu \cdot \Delta t < 1 \quad (3.36)$$

Das kühle, dichte und damit stoßdominierte Plasma der Chromosphäre stellt einen Extremfall für ν dar. Für Stöße zwischen Protonen bei $N = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ und $T = 10.000 \text{ K}$ ergibt sich eine Stoßfrequenz von $\nu = 2.4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ und damit die Bedingung

$$\Delta t < 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Bei thermischen Geschwindigkeiten von ca. 10 km/s für Protonen in der Chromosphäre und einer Höhe des Rechenfeldes von nur 10^4 km ergibt sich eine Transitzeit durch das Rechenfeld von rund 10^3 s. Damit das numerische System seine willkürliche Anfangsbedingung “vergißt”, muß auch der Simulationszeitraum von dieser Größenordnung sein. Zeitschritte der Ordnung 10^{-5} s erfordern dann etwa 10^8 Schritte, was vom numerischen Aufwand her nicht machbar ist.

Aus diesem Grund ist es nicht möglich, ein einfaches Euler – Verfahren nach (3.33) zu verwenden. Für das Euler – Verfahren ist charakteristisch, daß die zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} F_k$ nur mit den $F_k(t)$ zum Zeitpunkt t berechnet werden, es handelt sich um explizites Verfahren.

Für implizite Verfahren, bei denen die Berechnung der $\frac{\partial}{\partial t} F_k$ ganz oder teilweise mit Hilfe der neuen $F_k(t + \Delta t)$ erfolgt, gilt die Beschränkung der CFL – Bedingung nicht. Unter den impliziten Verfahren zeichnet sich das Crank - Nicholson – Verfahren

$$F_k(t + \Delta t) = F_k(t) + \Delta t \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} F_k(t) + \frac{\partial}{\partial t} F_k(t + \Delta t) \right) \quad (3.37)$$

dadurch aus, daß es eine Genauigkeit 2. Ordnung in t aufweist, im Gegensatz zur 1. Ordnung des Euler – Verfahrens oder auch des voll impliziten Verfahrens

$$F_k(t + \Delta t) = F_k(t) + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} F_k(t + \Delta t) \quad (3.38)$$

Ein implizites Verfahren hat den Vorteil, daß das Δt zumindest für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beliebig groß sein darf. In so einem Fall ist es möglich, den stationären Endzustand mit nur wenigen Zeitschritten zu bestimmen.

Die Vlasov – Gleichung (2.32) scheint zwar in den F_k linear zu sein, hängt aber in nichtlinearer Weise von den Momenten der Verteilungen ab. Dadurch ergeben sich Beschränkungen für die Δt , die im folgenden am Beispiel der Coulomb – Stöße erläutert werden. Diese Beschränkung ist aber weitaus weniger restriktiv als die CFL – Bedingung, außerdem zeichnen sich implizite Verfahren auch unter diesen Umständen im Vergleich zum Euler – Verfahren durch eine erheblich höhere numerische Stabilität aus.

Die Durchführung der Rechnung mit einem impliziten Verfahren ist aber erheblich aufwendiger als mit dem Euler – Verfahren. Bei der Berechnung der $\frac{\partial F_k}{\partial t}$ tauchen die zum Zeitpunkt t noch gar nicht bekannten $F_k(t + \Delta t)$ auf der rechten Seite der Entwicklungsgleichung (2.32) auf. Dort stehen auch Ableitungen der $F_k(t + \Delta t)$ nach v . Die Berechnung dieser Ableitungen nach (3.14), (3.15) verbindet die Bestimmung von $F_k(v_m, t + \Delta t)$ mit der von $F_k(v_{m-1}, t + \Delta t)$ und $F_k(v_{m+1}, t + \Delta t)$. Dadurch führt ein implizites Verfahren nicht auf die Lösung einer einfachen Gleichung der Form (3.33) wie beim Euler – Verfahren, sondern zu einem alle Stützstellen v_m umfassenden Gleichungssystem.

Wenn der v - Raum z.B. 100 Stellen umfaßt, entsteht ein Gleichungssystem mit 100 Unbekannten. Die Lösung des Systems ist aber recht einfach, da jedes $F_k(v_m, t + \Delta t)$ über die Ableitungen nur mit seinen Nachbarn $F_k(v_{m-1}, t + \Delta t)$ und $F_k(v_{m+1}, t + \Delta t)$ verknüpft ist. Folglich gibt es für jedes v_m eine Gleichung der Form:

$$a_m F_k(v_{m-1}, t + \Delta t) + b_m F_k(v_m, t + \Delta t) + c_m F_k(v_{m+1}, t + \Delta t) = \xi_m \quad (3.39)$$

Es handelt sich dabei um ein tridiagonales Gleichungssystem, die zugehörige Systemmatrix ist eine Bandmatrix der Bandbreite 3.

Doch die Gleichung (2.32) verbindet nicht nur alle $F_k(v_m)$ miteinander. Durch die Spiegelkraft und die Welle - Teilchen – Wechselwirkung nach (2.49), (2.50) werden F_0 und F_1 miteinander verbunden. Auf der linken Seite von Gleichung (3.39) treten für F_0 auch 3 Terme mit F_1 (und umgekehrt) auf. Dadurch erhöht sich die Bandbreite von 3 auf 6. Dies ist zwar mit geringem numerischen Mehraufwand verbunden, stellt aber kein prinzipielles Problem dar.

Der Konvektionsterm $v \frac{\partial F_k}{\partial s}$ der Gleichung (2.32) verbindet aber die F_k verschiedener Höhen s_l im Rechenfeld. Er führt dazu, daß bei einem impliziten Verfahren nun alle $F_{k=0,1}(s_l, v_m)$ miteinander verbunden sind. Wenn das Rechenfeld je 100 Stellen in s - und v - Richtung umfaßt, dann entsteht so ein Gleichungssystem mit 20.000 Gleichungen und ebensovielen Unbekannten. Die Struktur dieses Systems entspricht zwar noch einer Bandmatrix, durch die Verknüpfung verschiedener $F_k(s_l)$ hat sich die Bandbreite in diesem Beispiel aber auf ca. 200 erhöht. Ein solches System ist nicht einfach handhabbar, der Rechenaufwand steigt erheblich an.

Das Problem der Verknüpfung der $F_k(t + \Delta t)$ in verschiedenen Höhen s_l des Rechenfeldes ist ausschließlich auf die mit dem Konvektionsterm verbundene räumliche Ableitung $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ zurückzuführen. Alle anderen Terme der Vlasov – Gleichung (2.32) enthalten keine räumlichen Ableitungen der F_k .

Wenn darauf verzichtet wird, den Konvektionsterm implizit zu behandeln, und stattdessen ein explizites $\frac{\partial}{\partial s} F_k(t)$ angesetzt wird, dann sind die $F_k(t + \Delta t)$ bei verschiedenen s_l voneinander entkoppelt, und anstelle eines einzigen riesigen Gleichungssystems entsteht für jede Höhe ein alle v_m umfassendes System, das aufgrund seiner Bandstruktur leichter lösbar ist.

Die explizite Behandlung des Konvektionsterms führt dazu, daß die CFL – Bedingung (3.34) zu beachten ist, es gibt eine Obergrenze für Δt . Diese stellt aber keine allzu scharfe Einschränkung dar. Für $\Delta s = 20$ km und einem Wertebereich der v bis zu $10 v_{th}$ in der Chromosphäre ergibt sich beispielsweise die Bedingung $\Delta t < 0.22$ s.

Diese Begrenzung des Δt ist erheblich lockerer als die 10^{-5} s der Coulomb – Stöße. Im Grunde genommen handelt es sich hierbei um überhaupt keine Einschränkung. Der Grund dafür liegt bei den Coulomb – Stößen. Die Unbegrenztheit des Δt bei einem impliziten Verfahren gilt nur für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zwar ist der Coulomb – Stoßoperator (2.114) linear in den F_k und ihren Ableitungen, aber die Koeffizienten $l_{j,k}^h$ sind Reihenentwicklungen in den Parametern $x = \frac{V_{\perp}^2}{v_{th,j}^2}$ und $y = \frac{v^2}{2v_{th,j}^2}$. Damit besteht eine hochgradig nichtlineare Abhängigkeit von den thermischen Geschwindigkeiten der Teilchen und ihrer Stoßpartner. Da die thermischen Geschwindigkeiten ihrerseits Integrale der F_k sind, ist der Stoßoperator (2.114) nicht linear, sondern nur quasilinear in den F_k .

Fehler bei den Momenten können daher zu erheblichen Fehlern bei der Berechnung der Coulomb – Stöße führen. Da sich die Momente auch durch die Coulomb – Stöße ändern, stößt das implizite Verfahren bei den Coulomb – Stößen an Grenzen für das Δt . Denn für ein großes Δt kann es zu erheblichen Änderungen der Momente kommen, während der Stoßoperator (2.114) immer noch auf den Ausgangswerten dieser Momente basiert. Dies kann sich als Verletzung der Energie- oder Impulserhaltung bemerkbar machen oder dazu führen, daß die ganze Rechnung

numerisch instabil wird. Proberechnungen analog zu den Tests auf Energie- und Impulserhaltung in Abschnitt 4.1 zeigen, daß für ein chromosphärisches Plasma nur Δt bis zu 0.1 s verwendet werden dürfen. Damit stellt die Courant – Bedingung des Konvektionsterms keine zusätzliche Einschränkung für Δt dar.

Die Eigenschaft der Coulomb – Stöße, die Erhaltungsgrößen Gesamtenergie und -impuls des Plasmas konstant zu lassen, kann bei der numerischen Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32) verletzt werden. Alle übrigen Terme dieser Gleichung können zu einer Änderung von Energie und Impuls einer Teilchensorte führen. Die Coulomb – Stöße versuchen aber, die alten Werte “festzuhalten” und entsprechende Änderungen der F_k zu unterdrücken.

Abhilfe kann dadurch geschaffen werden, daß bei der Berechnung eines Zeitschritts $t \rightarrow t + \Delta t$ der stoßfreie Teil der Gleichung (2.32) sowie der Coulomb – Stoßoperator getrennt behandelt werden. Bei der separaten Berechnung eines Coulomb – Zeitschritts darf es dann keine Veränderung des Gesamtimpulses oder der Gesamtenergie des Plasmas geben. Aufgrund ihrer Komplexität wird auch die Welle - Teilchen – Wechselwirkung in einem separaten Teilschritt berechnet.

Jeder Zeitschritt $t \rightarrow t + \Delta t$ setzt sich damit aus folgenden Teilschritten zusammen:

- Berechnung eines stoßfreien Zeitschritts mit Hilfe aller Terme auf der linken Seite der Vlasov – Gleichung (2.32)
- Neuberechnung der Momente
- Berechnung eines Zeitschritts für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung
- Berechnung eines Zeitschritts für die Wellenenergie
- Neuberechnung der Momente
- Berechnung eines Zeitschritts für die Coulomb - Stöße
- Neuberechnung der Momente

Jede Änderung der reduzierten Verteilungen F_k erfordert eine Aktualisierung ihrer Momente vor dem nächsten Teilschritt. Die Momentenbestimmung erfolgt wie in Abschnitt (3.1.1) beschrieben. Auf die anderen Teilschritte wird im folgenden eingegangen.

Stoßfreier Zeitschritt

Die stoßfreie Vlasov – Gleichung (2.32) für die F_k lautet:

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} = -v \frac{\partial F_k}{\partial s} - \left(\frac{q}{m} E_{\parallel} - g \cos \psi \right) \frac{\partial F_k}{\partial v} - \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial F_{k+1}}{\partial v} + 2v(k+1)F_k \right) \quad (3.40)$$

Wenn ein implizites Verfahren für den Zeitschritt $t \rightarrow t + \Delta t$ angewendet werden soll, dann führt die Verkopplung der F_0 und F_1 durch den Geometrieterm von (3.40) wie schon erläutert

auf ein Gleichungssystem mit der Bandbreite 6. Dies stellt zwar kein grundsätzliches Problem dar, erhöht aber den Rechenaufwand.

Der Hauptgrund für die Einführung eines impliziten Verfahrens liegt in den Coulomb – Stößen, die andernfalls eine Reduzierung des Δt auf die Stoßzeit $1/\nu$ und damit bis auf die Größenordnung 10^{-5} s notwendig machen. Es wurde auch festgestellt, daß Δt aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit der Coulomb – Stöße von den Momenten nicht größer als etwa 0.1 s werden darf.

Um überhaupt ein mit geringem Aufwand zu lösendes Gleichungssystem zu erhalten, muß der Konvektionsterm $v \frac{\partial F_k}{\partial s}$ der Gleichung (3.40) explizit behandelt werden. Da das Euler – Verfahren mit erheblich weniger Rechenaufwand verbunden ist als ein implizites Verfahren, ist es interessant, auch die übrigen Terme von (3.40) daraufhin zu untersuchen, ob sie nicht ebenfalls explizit berechnet werden können.

Der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung (3.40) beschreibt die Wirkung des elektrischen und Gravitationsfeldes. Das \vec{E} - Feld tendiert dazu, die Wirkung des \vec{g} - Feldes teilweise zu kompensieren. Wenn es kein \vec{E} - Feld gibt, lautet die Courant – Bedingung für diesen Term:

$$\frac{\Delta t \cdot g}{\Delta v} < 1 \quad (3.41)$$

Wenn $\Delta v = 0.1 \cdot v_{th}$ in der Chromosphäre ist, dann gilt für Protonen $\Delta v \approx 900$ m/s. Mit $g = 274 \text{ m/s}^2$ und $\Delta t = 0.1$ s ergibt sich eine Courant – Zahl von $0.03 \ll 1$. Bei Anwesenheit eines \vec{E} - Feldes wird g effektiv verkleinert, und damit auch die Courant – Zahl. Es folgt, daß auch für schwere Ionen mit ihrer niedrigeren thermischen Geschwindigkeit genug Spielraum für eine Courant – Zahl < 1 vorhanden ist. Daher darf der Kraftterm explizit behandelt werden.

Nun zum Geometrieterm mit seinem Vorfaktor $\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial s}$. Der Term $\frac{\partial F_1}{\partial v}$ in der Klammer kann nach der Gaußschen Näherung durch $2v_{th}^2 \frac{\partial F_0}{\partial v}$ abgeschätzt werden, was für maxwellverteiltes F_0 gleich $2(v_D - v)F_0$ ist. Daher sind die beiden Summanden in der Klammer von vergleichbarer Größenordnung. Für einen Term der Form $v \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial s} F_0$ in der Gleichung (3.40) lautet die Courant – Bedingung:

$$v \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial s} \cdot \Delta t = v \frac{\partial \ln A}{\partial s} \cdot \Delta t < 1 \quad (3.42)$$

Die räumlichen Stützstellen s_i sollten so gewählt sein, daß sie die Geometrie der betrachteten Flußröhre gut auflösen, es sollte daher von Stelle zu Stelle keine großen Sprünge des Flußröhrenquerschnitts A geben. Daraus folgt:

$$\Delta s \cdot \frac{\partial \ln A}{\partial s} < 1 \quad (3.43)$$

Wenn die Courant – Bedingung (3.34) des Konvektionsterms erfüllt ist, gilt $v \Delta t < \Delta s$, so daß die Bedingung (3.42) des Geometrieterms ebenfalls erfüllt ist.

Es ist also möglich, die stoßfreie Vlasov – Gleichung (3.40) mit einem Euler – Verfahren zu lösen. Die Auswertung der rechten Seite dieser Gleichung wurde in den vorhergehenden Abschnitten vorbereitet. Die Berechnung der Ableitungen der F_k erfolgt nach (3.14), (3.15) und (3.25), die des elektrischen Feldes $E_{||}$ nach (2.37), die Schwerebeschleunigung g , der Flußröhrenquerschnitt A und der Winkel ψ sind als Funktionen der Ortskoordinate s durch die Geometrie der Flußröhre vorgegeben.

Damit ist es gelungen, alle Terme auf der rechten Seite von (3.40) auszuwerten, der stoßfreie Zeitschritt $t \rightarrow t + \Delta t$ kann für alle $F_k(s_l, v_m)$ berechnet werden.

Zeitschritt für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung

Die Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung basiert auf den Gleichungen (2.49) und (2.50), mit den Koeffizienten $D(v)$, $A^\pm(v)$ und $H(v)$ nach (2.64) – (2.66) und der “Stoßzeit” $\tau(v)$ nach (2.63). Dabei ist zu beachten, daß τ^{-1} proportional zur spektralen Wellenenergiedichte an der Resonanzfrequenz der betrachteten Teilchensorte und Geschwindigkeit v ist.

Dabei kann das Problem auftreten, daß die Zeitskala, auf der die Wellenenergie bei einer bestimmten Frequenz absorbiert wird, genau wie bei dem Ansatz eines starren Spektrums in Abschnitt 2.3.3 von der Größenordnung der Gyrofrequenz sein kann. Dies ist dann der Fall, wenn die Frequenz im Bereich der Gyrofrequenz einer Teilchensorte, z.B. der Protonen, der häufigsten Ionensorte, liegt, und die thermische Geschwindigkeit klein gegenüber der Alfvéngeschwindigkeit ist. Die Bedingung $v_{th} \ll v_A$ entspricht aber gerade einem kleinen Plasma - β und ist in der Korona der Sonne erfüllt. Dann haben relativ viele Teilchen eine der Gyrofrequenz entsprechende Resonanzfrequenz, so daß die Wellen rasch absorbiert werden.

Da die Gyrofrequenz in der unteren Korona im Bereich 10^{-5} s liegt und schon festgestellt wurde, daß eine Simulationszeit von mindestens einigen 10^3 s notwendig ist, tritt wie bei den Coulomb – Stößen ein Multiskalenproblem auf, die Zeitschritte Δt müssen wesentlich größer als die charakteristische Zeitskala der Gyroperiode sein.

Damit ist es nicht möglich, die Welle - Teilchen – Wechselwirkung mit Hilfe eines einfachen expliziten Verfahrens zu berechnen. Bei den Coulomb – Stößen läßt sich das Problem $\Delta t \gg 1/\nu_{Coul.}$ dadurch lösen, daß ein implizites Differenzenverfahren verwendet wird. Bei der Welle - Teilchen – Wechselwirkung wäre dies im Prinzip auch denkbar. Da das Problem jedoch in der raschen Absorption der spektralen Wellenenergiedichte \mathcal{B}_ω liegt, muß auch \mathcal{B}_ω in die implizite Rechnung einbezogen werden. Damit erstreckt sich die implizite Rechnung nicht nur über die v - Koordinate, sondern auch über alle ω . Hinzu kommt noch, daß die Energiegleichung (2.72) für \mathcal{B}_ω von der Ortskoordinate s abhängt. All dies führt letztlich dazu, daß ein impliziter Ansatz ein Gleichungssystem liefert, bei dem alle $F_{j,k}(s, v)$ und \mathcal{B}_ω miteinander verknüpft sind. Dies ist nicht mit vernünftigem Aufwand lösbar.

Die rasche Absorption der Wellenenergie macht ein implizites Verfahren für die \mathcal{B}_ω notwendig. Für die reduzierten Verteilungen F_k ist dies aber nicht der Fall. Denn aufgrund der Bedingung $\beta \ll 1 \Leftrightarrow v_{th} \ll v_A$ ist das Frequenzintervall um die Gyrofrequenz Ω herum, für das es eine signifikante Zahl von Teilchen gibt, die mit der Welle resonant in Wechselwirkung treten, sehr schmal. Dementsprechend enthält das Intervall relativ wenig Wellenenergie, der Energieinhalt ist klein gegenüber der kinetischen Energie der Teilchen. Eine signifikante Heizung der Teilchen ergibt sich erst dadurch, daß sich die Gyrofrequenz Ω mit der Höhe ändert und so auf jeder Höhe s ein anderes Frequenzintervall für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung zur Verfügung steht. Wäre der Energieinhalt eines Intervalls mit der Teilchenenergie vergleichbar, dann müßte sich durch diesen Mechanismus eine gigantische Heizrate ergeben.

Daher ist es erlaubt, die Wirkung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung auf die reduzierten Verteilungen F_k explizit zu berechnen. Es muß nur das Abklingen der Wellenenergie berücksichtigt werden. Hierbei hilft die lineare Abhängigkeit der Diffusionsgleichungen (2.49), (2.50) von der spektralen Energiedichte \mathcal{B}_ω an der Stelle der Resonanzfrequenz $\omega_{res}(v)$.

Zuerst werden die zeitlichen Ableitungen $(\frac{\delta F_{j,k}}{\delta t})_{W.T.}$ für jede Teilchensorte j berechnet. Mit Hilfe

dieser Werte kann die zeitliche Änderung der spektralen Energiedichte \mathcal{B}_{ω_i} durch die Integration (2.74) für alle Stützstellen i der Frequenzkoordinate bestimmt werden, wobei sich die Integration nur über die v erstreckt, deren Resonanzfrequenz in dem zu ω_i gehörenden Frequenzintervall $\Delta\omega_i$ liegt.

Die kurze Zeitskala der Wellenabsorption kann nun dazu führen, daß der Betrag von $\Delta t \cdot \left| \frac{\delta \mathcal{B}_{\omega_i}}{\delta t} \right|$ größer als die spektrale Energiedichte \mathcal{B}_{ω_i} ist. Ein einfacher expliziter Ansatz $\mathcal{B}_{\omega_i} \longrightarrow \mathcal{B}_{\omega_i} + \Delta t \cdot \frac{\delta \mathcal{B}_{\omega_i}}{\delta t}$ ergibt dann ein negatives \mathcal{B}_{ω_i} .

Die Ursache für die negativen \mathcal{B}_{ω} liegt in der Extrapolation der Ableitung $\frac{\delta \mathcal{B}_{\omega}}{\delta t}$ zum Zeitpunkt t über das gesamte Zeitintervall Δt , die charakteristisch für ein explizites Verfahren ist. Tatsächlich nimmt \mathcal{B}_{ω} und damit auch der Betrag von $\frac{\delta \mathcal{B}_{\omega}}{\delta t}$ im Laufe von Δt ab. Wenn die Änderungen der Verteilungsfunktionen während Δt vernachlässigt werden, klingt $\mathcal{B}_{\omega}(t)$ auf der Zeitskala T_{ω} exponentiell ab:

$$\mathcal{B}_{\omega}(t_0 + dt) = e^{-dt/T_{\omega}} \mathcal{B}_{\omega}(t_0) \quad (3.44)$$

$$T_{\omega} = \frac{\mathcal{B}_{\omega}}{|\delta \mathcal{B}_{\omega} / \delta t|} \quad (3.45)$$

Für die Änderung von \mathcal{B}_{ω} innerhalb des Zeitintervalls Δt folgt:

$$\Delta \mathcal{B}_{\omega} = -(1 - e^{-\Delta t/T_{\omega}}) \mathcal{B}_{\omega}$$

Während des Zeitintervalls Δt darf es also nur zu dieser Änderung von \mathcal{B}_{ω} kommen. Dies kann unter Beibehaltung eines expliziten Ansatzes dadurch erreicht werden, daß die Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung mit einem Vorfaktor χ_{ω} versehen wird:

$$\chi_{\omega} = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T_{\omega}}}}{\Delta t/T_{\omega}} \quad (3.46)$$

Durch diesen Ansatz ist es möglich, das Problem der Absorption der Wellen auf einer schnellen Zeitskala im Rahmen eines expliziten Verfahrens und unter Vermeidung der mit einem impliziten Verfahren verbundenen Verkopplung aller $F_{j,k}(s_l, v_m)$ und $\mathcal{B}_{\omega_i}(s_l)$ zu lösen.

Das hier vorgestellte Verfahren verhindert bei der Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung jeder Ionensorte j das Auftreten negativer \mathcal{B}_{ω} , indem durch den Dämpfungsfaktor (3.46) das Auftreten von $|\Delta \mathcal{B}_{\omega}| > \mathcal{B}_{\omega}$ verhindert wird. Die Effekte verschiedener Teilchensorten werden jedoch addiert. Wenn es nun zwei Ionensorten mit ähnlicher Gyrofrequenz gibt, kann es immer noch zu $|\Delta \mathcal{B}_{\omega}| > \mathcal{B}_{\omega}$ kommen. Um dies zu verhindern, sind die $\Delta \mathcal{B}_{\omega}$ mit Hilfe des Integrals (2.74) unter Beachtung der Resonanzbedingung für alle diskreten Frequenzen ω_i und der Summation über alle j zu berechnen. Dabei wird das maximale $\frac{|\Delta \mathcal{B}_{\omega_i}|}{\mathcal{B}_{\omega_i}}$ bestimmt. Falls dieser Wert größer als 1 ist, wird die gesamte Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung mit einem Faktor

$$\chi = \left(\max_i \frac{|\Delta \mathcal{B}_{\omega_i}|}{\mathcal{B}_{\omega_i}} \right)^{-1} \quad (3.47)$$

multipliziert. Damit ist endgültig gesichert, daß nicht mehr Energie von den Wellen auf die Teilchen übertragen wird, als im jeweiligen Frequenzintervall an Wellenenergie vorhanden ist.

Mit den Vorfaktoren χ_ω und χ kann die Wirkung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung auf die reduzierten Verteilungen $F_0(v)$ und $F_1(v)$ endgültig berechnet werden. Durch die Integration (2.74) unter Beachtung der Resonanzbedingung wird anschließend der Verlust an Wellenenergie $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}$ für jedes Frequenzintervall $\Delta\omega_i$ bestimmt.

Zeitschritt für die Wellenenergie

Die zeitliche Änderung der spektralen Energiedichte der Wellen wird nach Gleichung (2.72) berechnet. Die Terme auf der linken Seite beschreiben dabei die Ausbreitung der Wellen durch eine magnetische Flußröhre, deren Querschnittsfläche sich ebenso wie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Wellen als Funktion der Ortskoordinate s verändert. Die rechte Seite gibt die Absorption der Wellen durch die Teilchen und eine Diffusion von Wellenenergie im Frequenzraum infolge nichtlinearer Prozesse an, die im Rahmen der quasilinearen Theorie nicht näher beschreibbar sind.

Es bietet sich an, die rechte und die linke Seite dieser Gleichung getrennt zu behandeln. Zunächst können die beim Zeitschritt der Welle - Teilchen – Wechselwirkung bestimmten Absorptionsverluste $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}$ von den spektralen Energiedichten \mathcal{B}_{ω_i} abgezogen werden.

Anschließend wird die linke Seite der Energiegleichung (2.72) für jede Frequenz ω_i ausgewertet. Da die Phasengeschwindigkeit v_{ph} groß gegenüber den thermischen Geschwindigkeiten ist, kann für die Wellen nicht davon ausgegangen werden, daß für sie dieselbe CFL – Bedingung wie für den Konvektionsterm der Vlasov – Gleichung (2.32) erfüllt ist, es gilt vielmehr:

$$\Delta t > \frac{\Delta s}{v_{ph}} \quad (3.48)$$

Daher wird ein implizites Verfahren verwendet. Bei diesem Teilschritt wird nur die zeitliche Veränderung der \mathcal{B}_{ω_i} berechnet, auf Momenten der Verteilungsfunktionen basierende Größen wie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} oder die Schwerpunktsgeschwindigkeit U_m des Plasmas sind zeitlich konstante Parameter. Da sich die Wellenenergie im Rechenfeld schnell von unten nach oben ausbreitet, wird für die räumlichen Ableitungen ein Upwind - Differenzenquotient verwendet:

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\omega_i}}{\partial s}(s_l) \approx \frac{\mathcal{B}_{\omega_i}(s_l) - \mathcal{B}_{\omega_i}(s_{l-1})}{\Delta s_{l-1}} \quad (3.49)$$

Der Upwind - Differenzenquotient ist nicht nur physikalisch einleuchtend, sondern zeichnet sich gegenüber z.B. einem zentralen Differenzenquotienten durch große numerische Stabilität aus. Außerdem hängt durch diesen Ansatz jedes $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}(s_l)$ nur von seinem unteren Nachbarn $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}(s_{l-1})$ ab. Dies erleichtert sowohl die Lösung des aus dem impliziten Lösungsansatz resultierende Gleichungssystems als auch die Definition der Randbedingungen.

Am unteren Rand wird das Spektrum der in das Rechenfeld hineinlaufenden Wellen $\mathcal{B}_{\omega_i}(s_{-1})$ fest vorgegeben. Durch den Upwind - Ansatz gibt es keine Abhängigkeit der spektralen Energiedichten im Innern des Rechenfeldes von den Werten am oberen Rand s_N , so daß automatisch ein offener Rand realisiert ist. Dies ist auch physikalisch richtig, da die Wellen am oberen Rand des Rechenfeld verlassen und keine weiteren Auswirkungen auf sein Inneres haben.

Für jede Höhe s_l gibt es für alle Frequenzen ω_i je eine Energiegleichung (2.72). Da der implizite Ansatz nur eine Abhängigkeit von $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}(s_{l-1})$ und $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}(s_l)$ mit sich bringt, kann dieses Gleichungssystem leicht vom unteren Rand aus, mit $\Delta\mathcal{B}_{\omega_i}(s_{-1}) = 0$, gelöst werden.

Abschließend kann noch der Diffusionsterm $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega}$ auf der rechten Seite von (2.72) berücksichtigt werden. Die Einführung einer schwachen Diffusion im Frequenzraum ist aus numerischen Gründen notwendig. Denn sowohl die Frequenzintervalle $\Delta\omega_i$ als auch das Magnetfeld $B(s_l)$ als Funktion der Stützstellen s_l in s - Richtung sind unabhängig von den Simulationsergebnissen fest vorgegeben. Für jede Teilchensorte j gibt es daher festgelegte räumliche Positionen s_l , bei denen die Gyrofrequenz von einem $\Delta\omega_i$ in das benachbarte, bei einer sich aufweitenden Flußröhre ist dies $\Delta\omega_{i-1}$, wechselt. Ohne Diffusion kann es nun vorkommen, daß im Frequenzintervall $\Delta\omega_i$ kaum noch Wellenenergie vorliegt, während im benachbarten $\Delta\omega_{i-1}$ die volle Wellenenergie vorhanden ist. Dadurch kommt es zu einer erhöhten Heizrate der betreffenden Ionensorte an der Stelle s_l . Dieser Effekt führt bei den Simulationsrechnungen zu unphysikalischen lokalen Maxima in den Temperaturprofilen.

Abhilfe kann dadurch geschaffen werden, daß ein schwacher Strom

$$\phi_i = \eta \cdot \frac{\mathcal{B}_{\omega_{i+1}} - \mathcal{B}_{\omega_i}}{\Delta\omega_i} \quad (3.50)$$

zwischen benachbarten Frequenzstellen ω_i zugelassen wird. Die Wirkung der Diffusion auf die Wellenenergie wird dann berechnet durch:

$$\Delta\mathcal{B}_{\omega_i} = -\Delta t \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{(\Delta\omega_i + \Delta\omega_{i-1})/2} \quad (3.51)$$

Durch diese Diffusion gibt es keine großen Unstetigkeiten bei der Wellenenergie zwischen benachbarten Frequenzstellen ω_i mehr, so daß das Problem der auf bestimmte Höhen konzentrierten Heizung nicht mehr auftritt. Der Zahlenwert des Diffusionskoeffizienten η wird bei jeder Simulationsrechnung neu festgelegt. Da es sich bei der Diffusion nach (3.51) um ein explizites Differenzenverfahren handelt, gilt auch für η eine CFL – Bedingung der Form:

$$\eta < \frac{\Delta\omega_i^2}{\Delta t} \quad (3.52)$$

Bei den meisten Rechnungen liegt η nur knapp unter diesem Maximalwert. Mit der Auswertung des Diffusionsterms wurde auch der letzte Summand in der Wellenenergiegleichung (2.72) berücksichtigt. Die Berechnung des Zeitschritts für die Wellenenergie ist damit abgeschlossen.

Zeitschritt für die Coulomb – Stöße

Es wurde schon festgestellt, daß die mittleren Stoßzeiten ν^{-1} in dem relativ kühlen und dichten Plasma der Übergangszone oder gar der Chromosphäre sehr klein gegenüber den Zeitschritten Δt sein können. Daher ist zur Berechnung eines Zeitschritts für die Coulomb – Stöße ein implizites Verfahren zu verwenden.

Das Crank - Nicholson – Verfahren nach (3.37) berücksichtigt zu gleichen Teilen die zeitlichen Änderungen der reduzierten Verteilungen, wie sie sich jeweils aus dem Zustand zu Beginn

des Zeitschritts und zu seinem Ende ergeben. Es zeichnet sich gegenüber dem voll impliziten Verfahren durch eine Genauigkeit 2. Ordnung in t aus.

Allerdings kann es in einem stoßdominierten Plasma vorkommen, daß das Plasma aus einem gestörten Zustand nach einer sehr kurzen Zeit $\nu^{-1} \ll \Delta t$ in das Gleichgewicht zurückkehrt und für den Rest des Zeitintervalls Δt Maxwellisch bleibt. In diesem Fall würde der Crank - Nicholson - Ansatz den gestörten Zustand stark übergewichten. Bei dem voll impliziten Verfahren nach (3.38) werden die zeitlichen Ableitungen der F_k nur mit Hilfe des Endzustands berechnet, so daß dieses Problem nicht auftritt. Daher wird der voll implizite Ansatz verwendet. In einem weniger stoßdominierten Plasma ist der Unterschied zwischen dem Crank - Nicholson- und dem voll impliziten Verfahren weniger bedeutend, so daß der voll implizite Ansatz immer verwendet wird.

Die Coulomb - Stöße werden mit den Diffusionsgleichungen (2.114) für F_0 und F_1 berechnet. Dabei sind die Gleichungen für F_0 und F_1 entkoppelt, so daß sie unabhängig voneinander gelöst werden können. Das implizite Verfahren führt daher zu keinem gemeinsamen Gleichungssystem für die $F_0(v_m)$ und $F_1(v_m)$, sondern zu zwei getrennten Systemen. Da der Coulomb - Stoßoperator keine Ableitung der F_k nach der Ortskoordinate s enthält, gibt es für jede Höhe s_l unabhängige Systeme. Die ersten und zweiten Ableitungen der F_k nach v in (2.114) sorgen dafür, daß man für jedes $F_k(v_m)$ eine Gleichung erhält, die auch von $F_k(v_{m\pm 1})$, aber von keinen weiteren $F_k(v_n)$ abhängig ist. Das aus dem impliziten Ansatz resultierende Gleichungssystem ist daher wie die Gl. (3.39) von tridiagonaler Struktur und mit geringem Aufwand zu lösen. Für die Ränder von v_0 und v_M werden dabei die Randbedingungen (3.17) verwendet. Da die Coulomb - Stöße die Dichte der Teilchen nicht verändern, kann für die F_0 eine zu dem Verfahren in Abschnitt 3.1.2 analoge Korrektur auf Teilchenzahlerhaltung durchgeführt werden.

Die Diffusionsgleichung (2.114) ist zwar linear in den $F_k(v)$, ihre Koeffizienten $l_{j,k}^h$ sind aber hochgradig nichtlineare Funktionen der Momente der $F_{j,k}$, die sehr empfindlich auf Änderungen dieser Momente reagieren. So kann z.B. eine Änderung der Temperaturanisotropie zu erheblichen Änderungen des Stoßoperators führen.

Es wird dem voll impliziten Verfahren gegenüber dem Crank - Nicholson - Verfahren der Vorzug gegeben, weil letzteres den vom thermischen Gleichgewicht weiter entfernten Anfangszustand vor der Durchführung des Zeitschritts Δt zu stark gewichtet. Doch auch die der Berechnung der $l_{j,k}^h$ zugrundeliegenden Momente der $F_{j,k}$ stammen aus diesem Anfangszustand.

Als Beispiel wird ein stoßdominiertes Plasma betrachtet, in dem $F_k(v)$ zu Beginn des Zeitschritts eine kleine Temperaturanisotropie aufweisen. Da $\nu \cdot \Delta t \gg 1$ gilt, wird diese Anisotropie während des Zeitintervalls abgebaut. Zum Ende des Zeitschritts sollten alle $F_{j,k}$ Maxwellisch sein, so daß das Coulomb - Stoßintegral (2.114) verschwindet. Doch wenn die $l_{j,k}^h$ auf den Momenten der Verteilungen zu Beginn des Zeitschritts mit ihrer Temperaturanisotropie basieren, dann entsprechen sie nicht den Bedingungen des thermischen Gleichgewichts, so daß (2.114) selbst für maxwellverteilte $F_k(v)$ von Null verschieden ist.

Die Berechnung von (2.114) für den Zeitschritt Δt liefert also ein fehlerhaftes Ergebnis. Die Ursache des Fehlers liegt darin, daß die anfangs vorhandene Temperaturanisotropie durch die konstanten $l_{j,k}^h$ künstlich über das gesamte Zeitintervall festgehalten wird. Dadurch wird ein nicht zu rechtfertigender Zwang auf das numerische System ausgeübt.

Da die $l_{j,k}^h$ nichtlineare Funktionen von Integralen aller $F_{j,k}$ sind, ist es zumindest nicht mit vertretbarem Aufwand möglich, sie in die implizite Rechnung einzubeziehen. Zur Lösung dieses Problems ist daher eine geeignete Näherung für die $l_{j,k}^h$ bzw. die Momente der $F_{j,k}$ zu finden.

Da die Coulomb – Stöße versuchen, das Plasma in das thermische Gleichgewicht zu überführen, erscheint es sinnvoll, anstelle der wahren Momente der $F_{j,k}$ ihre Werte im thermischen Gleichgewicht zu verwenden. Diese können unter Beachtung der Erhaltung der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses aller Ionensorten aus den wahren Werten berechnet werden. In einem stoßdominierten Plasma können sich jetzt während des Zeitschritts Δt die korrekten Maxwellverteilungen für die F_k einstellen, für die das Coulomb – Stoßintegral (2.114) verschwindet.

In einem stoßarmen Plasma dagegen hat die Durchführung des Zeitschritts Δt für die Coulomb – Stöße nur eine geringe Wirkung auf die F_k und damit auf deren Momente. Um die Coulomb – Stöße korrekt zu beschreiben, müssen für $\nu \cdot \Delta t \ll 1$ die wahren Momente der $F_{j,k}$ zur Berechnung der $l_{j,k}^h$ herangezogen werden, da die Verwendung der Momente des thermischen Gleichgewichts aufgrund der empfindlichen Abhängigkeit der $l_{j,k}^h$ von den Momenten zu Fehlern führt.

Die unterschiedliche Behandlung der beiden Grenzfälle $\nu \cdot \Delta t \gg 1$ und $\nu \cdot \Delta t \ll 1$ wirft die Frage auf, wie die $l_{j,k}^h$ bei mittleren Werten der Stoßfrequenz von $\nu \cdot \Delta t \approx 1$ zu berechnen sind. Es sollte auf jeden Fall ein stetiger Übergang zwischen den beiden Grenzfällen erreicht werden. Da die Werte der Momente für die beiden Grenzfälle bekannt sind, bietet es sich an, ein gewichtetes Mittel dieser Werte zu verwenden. Wenn x ein Moment symbolisiert, dann entspricht x_{wahr} dem tatsächlichen Wert zu Beginn des Zeitschritts Δt und x_{TE} dem Wert im thermischen Gleichgewicht. Die Mittelung sieht dann folgendermaßen aus:

$$x = x_{TE} + (x_{wahr} - x_{TE}) \cdot a \quad (3.53)$$

Die Gewichtsfunktion a sollte nur von dem Produkt $\nu \cdot \Delta t$ abhängen. Für $\nu \cdot \Delta t \rightarrow \infty$ muß $a \rightarrow 0$ gelten und für $\nu \cdot \Delta t \rightarrow 0$ $a \rightarrow 1$. Für große $\nu \cdot \Delta t$ bietet sich eine Abhängigkeit $a \propto (\nu \cdot \Delta t)^{-1}$ an, da der Einfluß des Zeitschritts Δt auf das Ergebnis dann durch den Faktor Δt in dem impliziten Ansatz (3.38) verschwindet, mehrere kleinere führen zu demselben Ergebnis wie weniger, aber größere Zeitschritte.

Durch eine Reihe von Rechnungen analog zu dem in Abschnitt 4.2 dargestellten Ergebnis stellte sich folgende Funktion $a(\nu \cdot \Delta t)$ als zweckmäßig heraus:

$$a = \frac{e}{e + \nu \cdot \Delta t} \quad (3.54)$$

Dabei wird für ν die klassische Coulomb – Stoßfrequenz (3.35) eingesetzt. Durch das hier vorgestellte Verfahren ist es möglich, die Zeitschritte für die Coulomb – Stöße auch für stoßdominierte Plasmen $\nu \cdot \Delta t \gg 1$ zu berechnen. Durch die Verwendung eines gewichteten Mittels zwischen den wahren Werten der Momente der reduzierten Verteilungen $F_{j,k}$ und den sich im thermischen Gleichgewicht einstellenden Werten lassen sich die mit der nichtlinearen Abhängigkeit der Coulomb – Stöße von den Momenten N , v_D , $V_{||}$ und V_{\perp} der beteiligten Ionen verbundenen Probleme lösen.

Damit ist auch der letzte Teil der Durchführung eines Zeitschritts $t \rightarrow t + \Delta t$ vollendet. Nun kann mit dem nächsten Zeitschritt des Relaxationsverfahrens zur Lösung der Vlasov –

Gleichung (2.32) begonnen werden. Dieses Verfahren wird solange durchlaufen, bis die gesuchte stationäre Lösung der Vlasov – Gleichung gefunden ist.

Kapitel 4

Tests des numerischen Verfahrens

Bevor Modelle des koronalen Plasmas berechnet werden, sollte das im letzten Abschnitt hergeleitete numerische Verfahren einigen Tests unterzogen werden. Dabei wird die Einhaltung der Erhaltungssätze für Teilchenzahl, Gesamtimpuls und -energie des Plasmas untersucht. Auf diese Weise wird sichergestellt, daß die im nächsten Kapitel vorgestellten Ergebnisse des kinetischen Modells nicht auf numerischen Artefakten beruhen.

Zuerst wird mit den Coulomb – Stößen ein einzelner Term der Vlasov – Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungen $F_k(s, v, t)$ detailliert auf seine Erhaltungseigenschaften untersucht. Anschließend werden einfache Simulationsrechnungen für ein Plasma durchgeführt, das nicht durch Wellen geheizt wird. Dabei wird besonders auf numerische Teilchen- und Energieerzeugung geachtet. Anschließend werden kinetische Ergebnisse für ein Plasma mit einem Temperaturgradienten mit analytischen Ergebnissen nach Spitzer und Härm (1953) verglichen.

4.1 Coulomb – Stöße im homogenen Plasma

Die Berechnung der Coulomb – Stöße basiert auf der Gleichung (2.114) mit den Parametern $l_{j,k}^h$, die nach Anhang A durch komplizierte Reihenentwicklungen mit Konvergenzproblemen berechnet werden. Daher stellt sich die Frage, ob dabei die Erhaltungssätze für die Teilchenzahl sowie Gesamtimpuls und -energie des Plasmas erfüllt sind.

Um die Erhaltungseigenschaften der Coulomb – Stöße zu untersuchen, wird von einem räumlich homogenen und kräftefreien Plasma ausgegangen, das keiner Wechselwirkung mit Wellen ausgesetzt ist. Die Vlasov – Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungen F_k vereinfacht sich in diesem Fall zu:

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} = \left(\frac{\delta F_k}{\delta t} \right)_{Coul.} \quad (4.1)$$

Es wird also eine Teilchenverteilung betrachtet, die sich aus einem vorgegebenen Anfangszustand heraus nur unter dem Einfluß der Coulomb – Stöße entwickelt und schließlich das thermische Gleichgewicht erreichen sollte.

4.1.1 Verschwinden des Coulomb – Stoßoperators im thermischen Gleichgewicht

Im thermischen Gleichgewicht weisen alle Teilchensorten Maxwellverteilungen mit derselben Temperatur T und Driftgeschwindigkeit v_D auf. Dieser Zustand ändert sich zeitlich nicht, solange es keinen Prozeß gibt, der das Plasma aus dem Gleichgewichtszustand herauszubringen versucht. Aus der Gleichung (4.1) folgt sofort, daß die Coulomb – Stöße im thermischen Gleichgewicht verschwinden müssen. Die Coulomb – Stöße versuchen, die Verteilungsfunktionen so zu verändern, daß das thermische Gleichgewicht erreicht wird. Wenn dies geschafft ist, verschwindet ihre Wirkung auf die F_k .

Das Verschwinden des Coulomb – Stoßoperators $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ im thermischen Gleichgewicht ist daher eine sehr grundlegende Eigenschaft, die auch bei der numerischen Berechnung dieses Operators erfüllt sein muß. Andernfalls könnte das numerische System niemals den Gleichgewichtszustand erreichen.

Die Einhaltung dieser Bedingung kann leicht überprüft werden. Dazu werden für die reduzierten Verteilungsfunktionen der verschiedenen Ionensorten isotrope Maxwellverteilungen mit derselben Temperatur T vorgegeben. Da die Teilchensorten nicht gegeneinander driften, kann die Geschwindigkeit v_D ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden. Mit diesen Verteilungsfunktionen $F_{j,k}$ wird dann der Coulomb – Stoßoperator (2.114) für verschiedene Geschwindigkeiten v ausgewertet.

Die so gewonnenen Zahlenwerte werden aufgrund unvermeidlicher numerischer Fehler niemals exakt gleich 0 sein. Um die Größe dieser Fehler zu bewerten, werden die Ergebnisse auf $1/F_k(v)$ normiert. Der Ausdruck $\frac{1}{F_k} \cdot (\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ liefert eine Abschätzung für das Inverse der Zeitskala, auf der der Fehler bei der Berechnung von $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ zu einer signifikanten Größe anwächst.

Schon aus der klassischen Stoßfrequenz ν nach (3.35) folgt, daß die Stöße in dem kühlen und dichten Plasma der Übergangszone oder erst recht der Chromosphäre eine stärkere Rolle spielen als in der heißen und dünnen Korona. Daher sind auch die bei der Berechnung der Coulomb – Stöße auftretenden Fehler in der Chromosphäre/Übergangszone kritischer als in der Korona.

Aus diesem Grund werden $\frac{1}{F_k(v)} \cdot (\frac{\delta F_k(v)}{\delta t})_{Coul.}$ für eine Reihe von Geschwindigkeiten unter Bedingungen berechnet, wie sie für die obere Chromosphäre typisch sind. Damit wird ein Extremfall gewählt. Bei Modellrechnungen in der Übergangszone oder Korona können die Coulomb – Stöße nur schwächer ausgeprägt sein. Für die Temperatur wird also $T = 10.000 \text{ K}$ angesetzt und für die Protonendichte $N_p = 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Als weitere Ionensorten werden He^{2+} - Ionen mit einer Dichte von $N_{He} = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ und O^{5+} - Ionen als Repräsentant seltenerer schwerer Ionen mit $N_O = 10^{13} \text{ m}^{-3}$ betrachtet.

Bei der Berechnung der $\frac{1}{F_k(v)} \cdot (\frac{\delta F_k(v)}{\delta t})_{Coul.}$ mit maxwellverteilten $F_k(v)$ stellt sich heraus, daß sich diese normierten Fehler bemerkenswert wenig ändern, wenn v über einen Bereich von einigen thermischen Geschwindigkeiten variiert wird und sich die Werte von $F_k(v)$ dabei über mehrere Größenordnungen verändern. Zwischen benachbarten Geschwindigkeitsstellen v_m treten Sprünge des Fehlers, auch mit Vorzeichenwechsel, auf, die stärker sind als mögliche systematische Effekte. Der Betrag des Fehlers liegt dabei für alle v in derselben Größenordnung.

Die Tabelle 4.1 gibt diese typischen Größenordnungen der Fehler von F_0 und F_1 für die Stöße zwischen den Protonen, Helium- und Sauerstoff - Ionen unter chromosphärischen Bedingungen an. Mit einem p - He - Stoß wird dabei der Einfluß der Stöße von Protonen mit He^{2+} - Ionen auf die reduzierten Verteilungen der Protonen verstanden.

Stoßprozeß	$\frac{1}{F_0} \cdot \left(\frac{\delta F_0}{\delta t}\right)_{Coul.} [\text{s}^{-1}]$	$\frac{1}{F_1} \cdot \left(\frac{\delta F_1}{\delta t}\right)_{Coul.} [\text{s}^{-1}]$
p - p	10^{-9}	10^{-9}
p - He^{2+}	10^{-10}	10^{-10}
p - O^{5+}	10^{-12}	10^{-11}
He^{2+} - p	10^{-9}	10^{-9}
He^{2+} - He^{2+}	10^{-10}	10^{-9}
He^{2+} - O^{5+}	10^{-12}	10^{-11}
O^{5+} - p	10^{-9}	10^{-9}
O^{5+} - He^{2+}	10^{-9}	10^{-9}
O^{5+} - O^{5+}	10^{-11}	10^{-10}

Tabelle 4.1: Verschwinden des Coulomb – Stoßintegrals unter chromosphärischen Bedingungen. Für die hier eingesetzten maxwellverteilten $F_k(v)$ sollte $\left(\frac{\delta F_k}{\delta t}\right)_{Coul.} = 0$ gelten. Durch die endliche numerische Genauigkeit treten jedoch Fehler auf, die nach einer Normierung auf $\frac{1}{F_k}$ nur wenig von v abhängen. Die Tabelle enthält typische Werte dieser normierten Fehler.

Selbst in der extrem stoßdominierten Chromosphäre liegen die normierten Fehler bei der Bestimmung von $\left(\frac{\delta F_k}{\delta t}\right)_{Coul.}$ bei höchstens 10^{-9} s^{-1} . Wenn die zeitliche Entwicklung des Modellplasmas berechnet wird, liegt die Zeitskala, auf der diese Fehler zu einer signifikanten Veränderung der F_k führen, damit in der Größenordnung 10^9 s . Schon in Abschnitt 3.2.2 wurde festgestellt, daß die gesamte Simulationszeit typischerweise von der Größenordnung 10^3 s ist. Bei großen Rechenfeldern, die bis in den Sonnenwind hineinreichen sollen, kann sie auch bei 10^4 s oder sogar 10^5 s liegen. Auf jeden Fall ist sie klein gegenüber der Zeitskala des Fehlers durch ein Nichtverschwinden des Coulomb – Stoßoperators im thermischen Gleichgewicht.

Die Forderung $\left(\frac{\delta F_k(v)}{\delta t}\right)_{Coul.} = 0$ im thermischen Gleichgewicht ist also in dem stoßdominierten chromosphärischen Plasma sehr gut erfüllt. Da $\frac{1}{F_k(v)} \left(\frac{\delta F_k(v)}{\delta t}\right)_{Coul.}$ linear von der Dichte der Stoßpartner abhängt, und die Coulomb – Stöße mit zunehmender Teilchengeschwindigkeit schwächer werden, ist $\frac{1}{F_k(v)} \left(\frac{\delta F_k(v)}{\delta t}\right)_{Coul.}$ in dem dünnen und heißen Plasma der Korona kleiner als in der Chromosphäre. Daher ist auch zu erwarten, daß der normierte Fehler bei der Einhaltung von $\left(\frac{\delta F_k(v)}{\delta t}\right)_{Coul.} = 0$ im thermischen Gleichgewicht für koronale Dichten und Temperaturen kleiner ist als in der Chromosphäre.

Die Tabelle 4.2 gibt die relativen Fehler an, die sich für koronale Bedingungen mit $T = 10^6 \text{ K}$, $N_p = 10^{14} \text{ m}^{-3}$, $N_{\text{He}} = 10^{13} \text{ m}^{-3}$ und $N_{\text{O}} = 10^{11} \text{ m}^{-3}$ ergeben. Die Werte liegen tatsächlich um etwa 4 Größenordnungen unter denen in Tabelle 4.1. Da der Vorfaktor Γ_j der Coulomb – Stöße nach (2.111) über den Coulomb – Logarithmus nur schwach von der Dichte abhängt, die Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j nach (2.105), (2.106) aber über ihre Abhängigkeit von der Verteilungsfunktion f_j proportional zur Dichte der Stoßpartner sind, kann davon ausgegangen werden, daß ein Faktor 10^{-2} auf die niedrigere Dichte zurückzuführen ist. Der Rest des Unterschieds basiert auf der höheren Temperatur.

Die Abhängigkeit der Coulomb – Stöße von der Dichte der Stoßpartner kann auch innerhalb der

Stoßprozeß	$\frac{1}{F_0} \cdot \left(\frac{\delta F_0}{\delta t}\right)_{Coul.} [s^{-1}]$	$\frac{1}{F_1} \cdot \left(\frac{\delta F_1}{\delta t}\right)_{Coul.} [s^{-1}]$
p - p	10^{-14}	10^{-13}
p - He ²⁺	10^{-15}	10^{-14}
p - O ⁵⁺	10^{-16}	10^{-14}
He ²⁺ - p	10^{-14}	10^{-13}
He ²⁺ - He ²⁺	10^{-15}	10^{-14}
He ²⁺ - O ⁵⁺	10^{-16}	10^{-14}
O ⁵⁺ - p	10^{-14}	10^{-14}
O ⁵⁺ - He ²⁺	10^{-15}	10^{-15}
O ⁵⁺ - O ⁵⁺	10^{-16}	10^{-16}

Tabelle 4.2: Verschwinden des Coulomb – Stoßintegrals unter koronalen Bedingungen. Es wird dieselbe Darstellung verwendet wie in Tabelle 4.1

Tabellen 4.1 und 4.2 abgelesen werden. Die Fehler variieren mit der Dichte der Stoßpartner. Nur bei den Stößen mit den O⁵⁺ - Ionen sind sie größer, als es nach dem Dichteverhältnis zu erwarten wäre. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Stoßfrequenz nach (3.35) über $q_j^2/v_{j,th}^3$ von Ladung und thermischer Geschwindigkeit des Stoßpartners abhängt. Im thermischen Gleichgewicht wird daraus:

$$\nu \propto q_j^2 m_j^{3/2} \quad (4.2)$$

Für den Unterschied zwischen den Stößen mit O⁵⁺ und He²⁺ ergibt das einen Faktor 50, so daß die Unterschiede zwischen den Stößen mit diesen beiden Ionensorten dadurch erklärt werden können.

Es kann also festgestellt werden, daß das numerische Verfahren die Bedingung $\left(\frac{\delta F_k(v)}{\delta t}\right)_{Coul.} = 0$ hervorragend erfüllt. An diesem Ergebnis zeigt sich, wie sinnvoll es ist, mit der Gaußschen Näherung für $F_{k \geq 2}$, der numerischen Differentiation (3.12) der F_k nach v und der Annahme maxwellverteilter Stoßpartner bei der Berechnung der Coulomb – Stöße nur solche Näherungen zu machen, die für maxwellverteilte F_k exakt gelten.

4.1.2 Erfüllung der Erhaltungssätze beim Relaxationsvorgang

Die Coulomb – Stöße tendieren dazu, jede beliebige Anfangsverteilung in eine isotrope Maxwellverteilung zu überführen. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß mit dem Verschwinden des Coulomb – Stoßoperators im thermodynamischen Gleichgewicht eine wichtige Voraussetzung für die Konvergenz der numerischen Lösung der Gleichung (4.1) erfüllt ist.

Es wird nun untersucht, ob bei diesem Relaxationsvorgang die Erhaltungssätze für Teilchenzahl, Impuls und Energie erfüllt sind. Dabei wird die zeitliche Entwicklung der Verteilungen von einer oder zwei Ionensorten mit (4.1) berechnet und überprüft, ob sich die Teilchendichten N_j , die Gesamtimpulsdichte

$$p = \sum_j \int v F_{j,0}(v) dv = \sum_j N_j v_{j,D} \quad (4.3)$$

oder die Gesamtenergiedichte

$$E = \sum_j \frac{m_j}{2} \int v^2 F_{j,0}(v) + F_{j,1}(v) dv \quad (4.4)$$

während des Relaxationsvorgangs verändern.

Abbau einer Temperaturanisotropie

Zuerst wird von dem einfachen Fall einer einzigen Ionensorte mit einer anisotropen Bi-Maxwell-Verteilung ausgegangen. Das Plasma befindet sich in Ruhe, doch da die Coulomb – Stöße nicht vom absoluten Wert von v , sondern von der Geschwindigkeitsdifferenz zu den Stoßpartnern abhängen (vgl. Anhang A), stellt dies keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.

Aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit der Coulomb – Stöße von den Momenten der beteiligten Teilchenverteilungen und der Mittelung (3.54) zwischen ihnen und den zum thermodynamischen Gleichgewicht gehörenden Werten ist es nicht leicht möglich, Normierungen auf die Dichte und die thermischen Geschwindigkeiten durchzuführen und so allgemeingültige Ergebnisse zu erhalten. Stattdessen werden einige für die Atmosphäre der Sonne typische Beispiele diskutiert.

Als erstes Beispiel wird das kühle, dichte und damit stoßdominierte Plasma der Chromosphäre gewählt. Es werden nur Protonen mit einer Dichte von $N_p = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ betrachtet. Zu Beginn der Rechnung liegt eine starke Temperaturanisotropie mit $T_{\parallel} = 10^4 \text{ K}$ und $T_{\perp} = 2 \cdot 10^4 \text{ K}$ vor. Daraus ergibt sich eine Energiedichte von $E = 6.9033 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^{-3}$. Es wird mit Zeitschritten von $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ gerechnet.

Es stellt sich folgender Endzustand ein: $N = 9.88 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$, $T_{\parallel} = T_{\perp} = 1.6967 \cdot 10^4 \text{ K}$ und $E = 6.9456 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^{-3}$. Die Driftgeschwindigkeit bleibt mit 10^{-10} m/s im Vergleich zu $v_{th} = 9100 \text{ m/s}$ und der Diskretisierung $\Delta v = 910 \text{ m/s}$ der Geschwindigkeitskoordinate im Rahmen der Rechengenauigkeit gleich Null.

Beim Abbau einer starken Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 2$ im stoßdominierten chromosphärischen Plasma ergeben sich sowohl bei der Teilchen- als auch bei der Energieerhaltung Fehler der Größenordnung 1%. Damit ist die Einhaltung dieser Erhaltungssätze bei der numerischen Lösung von (4.1) sehr gut gewährleistet. Die Impulserhaltung ist sogar mit der vollen numerischen Genauigkeit erfüllt, aus Symmetriegründen war aber keine Impulsänderung zu erwarten.

In Abschnitt 3.1.2 wurde ein Verfahren vorgestellt, numerische Fehler bei der Erhaltung der Teilchenzahl zu vermeiden. Das Verfahren läßt sich in völlig analoger Weise auf die Coulomb – Stöße anwenden. Da die Teilchendichte nach (2.5) – (2.12) in alle anderen Momente der reduzierten Verteilungen eingeht, handelt es sich bei ihr um eine kritische Größe, die möglichst keinen Fehler aufweisen sollte.

Daher wird die Relaxationsrechnung im chromosphärischen Plasma unter Verwendung dieser Korrektur wiederholt. Nach Einstellung eines stationären Zustands ist nun $N \equiv 10^{16} \text{ m}^{-3}$, $T_{\parallel} = T_{\perp} = 1.6818 \cdot 10^4 \text{ K}$ und $E = 6.966 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^{-3}$. Die Driftgeschwindigkeit bleibt mit 10^{-9} m/s unter Berücksichtigung der Rechengenauigkeit gleich Null.

Nun wird die Teilchendichte N exakt erhalten. Der Fehler bei der Energieerhaltung bleibt bei 1% und hat sich gegenüber der Rechnung ohne erzwungene Teilchenzahlerhaltung nicht signifikant geändert. Durch die Verhinderung des ohnehin kleinen Fehlers bei der Erhaltung von N werden die übrigen Erhaltungseigenschaften nicht negativ beeinflusst. Die Ergebnisse

ändern sich auch bei einer Verringerung der Zeitschritte von $\Delta t = 0.01$ s auf $\Delta t = 0.002$ s nur geringfügig.

Um die Erhaltungseigenschaften beim Relaxationsvorgang weiter zu untersuchen, wird eine Reihe von Rechnungen mit Temperaturanisotropien $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 2$ oder $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 0.5$ in der Chromosphäre., Übergangszone und Korona der Sonne durchgeführt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 4.3 zusammengefaßt.

N [m^{-3}]	T_{\parallel} [K]	T_{\perp} [K]	E [J m^{-3}]	T [K]	E [J m^{-3}]	ΔE [%]
10^{16}	$2 \cdot 10^4$	10^4	$5.5226 \cdot 10^{-3}$	$1.3068 \cdot 10^4$	$5.4128 \cdot 10^{-3}$	2.0
10^{15}	10^5	$2 \cdot 10^5$	$6.9033 \cdot 10^{-3}$	$1.6899 \cdot 10^5$	$6.9996 \cdot 10^{-3}$	1.4
10^{15}	$2 \cdot 10^5$	10^5	$5.5226 \cdot 10^{-3}$	$1.3289 \cdot 10^5$	$5.5041 \cdot 10^{-3}$	0.3
10^{14}	10^6	$2 \cdot 10^6$	$6.9033 \cdot 10^{-3}$	$1.6500 \cdot 10^6$	$6.8339 \cdot 10^{-3}$	1.0
10^{14}	$2 \cdot 10^6$	10^6	$5.5226 \cdot 10^{-3}$	$1.3985 \cdot 10^6$	$5.7931 \cdot 10^{-3}$	4.9

Tabelle 4.3: Relaxation eines Bi-Maxwell - verteilten Einkomponentenplasmas

Auf der linken Seite der Tabelle sind die Anfangsbedingungen aufgelistet, auf der rechten Seite die Endzustände für die Temperatur $T = T_{\parallel} = T_{\perp}$ und die Energiedichte E sowie der relative Fehler ΔE der Energieerhaltung. In allen Fällen bleibt das Plasma im Rahmen der numerischen Genauigkeit in Ruhe, daher sind keine Werte für die Driftgeschwindigkeit in die Tabelle aufgenommen worden.

Die Ergebnisse zeigen beim Abbau einer starken Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 2$ oder $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 0.5$ nur sehr geringe Fehler bei der Energieerhaltung. Für $T_{\perp} > T_{\parallel}$ liegen sie stets bei 1%, für $T_{\perp} < T_{\parallel}$ können sie etwas größer sein. Da die Welle - Teilchen - Wechselwirkung aber bevorzugt T_{\perp} vergrößert, ist dieser Fall für Modelle der Korona der Sonne weniger bedeutend.

Die guten Ergebnisse für die Energieerhaltung ändern sich nur wenig, wenn sich die Dichte und die Temperatur von der Chromosphäre bis zur Korona um jeweils einen Faktor 100 ändern. Dies ist bemerkenswert, da sich dabei auch die Stoßfrequenz ν erheblich ändert. Mit der Stoßfrequenz wird auch die Behandlung der Momente der Verteilungen bei der Berechnung der Coulomb - Stöße variiert. Der Parameter a in der Mittelung (3.53) ist eine Funktion von $\nu \cdot \Delta t$. Bei der chromosphärischen Rechnung in Tabelle 4.3 wurde ein $\Delta t = 0.01$ s verwendet, sonst $\Delta t = 0.05$ s. Für die Rechnungen mit $N = 10^{16}$, 10^{15} und 10^{14} m^{-3} lauten die Werte $\nu \cdot \Delta t = 1800$, 30 und 0.1. Damit werden alle Bereich $\nu \cdot \Delta t > 1$, $\nu \cdot \Delta t \approx 1$ und $\nu \cdot \Delta t < 1$ abgedeckt. In einem stoßdominierten Plasma werden die Momente des thermodynamischen Gleichgewichts verwendet, in einem stoßarmen Plasma die wahren Werte der Momente, und es wird ein stetiger Übergang zwischen diesen beiden Grenzfällen erreicht. Die gute Energieerhaltung in allen Fällen zeigt, daß dieser Ansatz sinnvoll ist.

Es wurden noch einige Rechnungen für das chromosphärische Plasma mit $N = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ und $T_{\parallel} = 10^4$ K durchgeführt. Die Anisotropie wurde auf $T_{\perp} = 1.1 \cdot T_{\parallel}$ und weiter auf $T_{\perp} = 1.01 \cdot T_{\parallel}$ reduziert. Dabei verringerte sich der Fehler bei der Energieerhaltung auf 0.7% bzw. 0.08%. Der Fehler ist demnach von 1. Ordnung in $(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1)$.

Gegenseitige Drift zweier Plasmakomponenten

Beim Abbau einer Temperaturanisotropie konnte eine gute Erfüllung der Erhaltungssätze für Teilchenzahl, Impuls und Energie festgestellt werden. Der Fehler bei der Teilchenzahlerhaltung kann korrigiert werden, ohne daß es negative Auswirkungen auf die anderen Erhaltungsgrößen gibt. Daher wird die Teilchenzahl auch bei den folgenden Rechnungen stets korrigiert.

Im letzten Abschnitt wurde die Entwicklung nur einer Teilchensorte betrachtet. Als nächstes wird der Impuls- und Energieaustausch zwischen zwei gegeneinander driftenden Teilchenpopulationen untersucht. Um die Effekte von Temperaturanisotropien und Geschwindigkeitsunterschieden besser voneinander trennen zu können, werden für die Verteilungsfunktionen isotrope Maxwellverteilungen gleicher Temperatur angesetzt, die sich nur in ihrer Driftgeschwindigkeit unterscheiden.

Bei einem ersten Satz von Rechnungen handelt es sich bei beiden Stoßpartnern um Protonen. Auch die Dichten der beiden Teilchenpopulationen sind gleich. Die Tabelle 4.4 enthält die Ergebnisse für typische Plasmabedingungen der Chromosphäre, der Übergangszone und der Korona. Auf der linken Seite sind die Anfangsbedingungen aufgelistet. Die Spalte N gibt die Dichte beider Teilchenpopulationen an, die Gesamtdichte ist also gerade doppelt so groß. T ist die Temperatur, p der Gesamtimpuls nach (4.4), E die Gesamtenergie nach (4.3), $v_{2,D}$ gibt die Driftgeschwindigkeit der zweiten Teilchenpopulation an. $v_{1,D}$ wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Null gesetzt. $v_{2,D}$ wurde so gewählt, daß es ungefähr der halben thermischen Geschwindigkeit der Protonen entspricht.

N [m ⁻³]	T [K]	$v_{2,D}$ [km/s]	p [kg m ⁻² s ⁻¹]	v_D [km/s]	p [kg m ⁻² s ⁻¹]	Δp [%]
10^{16}	10^4	5.000	$8.3631 \cdot 10^{-8}$	2.500	$8.3631 \cdot 10^{-8}$	0.00
10^{15}	10^5	16.00	$2.6762 \cdot 10^{-8}$	8.000	$2.6762 \cdot 10^{-8}$	0.00
10^{14}	10^6	50.00	$8.3631 \cdot 10^{-9}$	25.00	$8.3631 \cdot 10^{-9}$	0.00

N [m ⁻³]	T [K]	E [J m ⁻³]	T [K]	E [J m ⁻³]	ΔE [%]
10^{16}	10^4	$4.3511 \cdot 10^{-3}$	$1.0239 \cdot 10^4$	$4.3453 \cdot 10^{-3}$	0.13
10^{15}	10^5	$4.3561 \cdot 10^{-3}$	$1.0147 \cdot 10^5$	$4.3101 \cdot 10^{-3}$	1.07
10^{14}	10^6	$4.3511 \cdot 10^{-3}$	$1.0241 \cdot 10^6$	$4.3462 \cdot 10^{-3}$	0.11

Tabelle 4.4: Relaxation eines driftenden Protonen - Protonen – Plasmas

Die rechte Seite der Tabelle enthält die Ergebnisse für die Temperatur und die Driftgeschwindigkeit im thermodynamischen Gleichgewicht, die Gesamtimpuls- und Energiedichte sowie die relativen Fehler bei der Erhaltung von Impuls und Energie. Die Tabelle ist in zwei Teile aufgespalten, der erste Teil stellt die Impuls- und der zweite Teil die Energiebilanz dar.

Es ist bemerkenswert, daß die Impulserhaltung so genau gilt. Diese exakte Erhaltung des Impulssatzes gilt für alle untersuchten Dichten und ist somit unabhängig davon, ob die wahren Momente der reduzierten Verteilungen oder die des thermischen Gleichgewichts verwendet werden. Die Ursache hierfür ist die Symmetrie zwischen den beiden gegeneinander driftenden Verteilungen der gleichen Teilchensorte mit gleicher Dichte und Temperatur. Beide Verteilungsfunktionen erfahren im Schwerpunktssystem durch die Coulomb – Stöße bis auf ein Vorzeichen von v die gleichen Änderungen.

Die Energieerhaltung ist ebenfalls gut erfüllt, in den Grenzfällen eines sehr dichten und eines sehr dünnen Plasmas sogar sehr gut. Bei der mittleren Dichte liegt der Fehler mit 1% etwas höher, damit entspricht er den beim Abbau einer Temperaturanisotropie gefundenen Werten. Diese geringfügige Verschlechterung könnte auf die Näherung (3.53) der Bildung eines gewichteten Mittelwerts der Momente und ihrer Werte im thermodynamischen Gleichgewicht zurückzuführen sein, da der Parameter $\nu \cdot \Delta t$ hier von der Größenordnung 1 ist.

Da die Ursache des exakten Verschwindens eines Fehlers bei der Impulserhaltung in der unphysikalischen Annahme zweier gegeneinander driftender Protonenverteilungen gleicher Dichte liegt, wird die Rechnung mit einem für die Sonne realistischeren Plasma wiederholt. Es wird nun eine Verteilung von He^{2+} - Ionen betrachtet, die gegenüber einer Protonenverteilung driftet. Das Bezugssystem ist wieder das Ruhesystem der Protonen zu Beginn der Rechnung, so daß für die Protonen anfangs $v_{p,D} = 0$ gilt. Die Dichte der He^{2+} - Ionen beträgt $\frac{1}{10}$ der Protonendichte. Beide Teilchensorten sollen wieder dieselbe Temperatur aufweisen.

$N_p [\text{m}^{-3}]$	$T [\text{K}]$	$v_{\text{He}^{2+},D} [\text{km/s}]$	$p [\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}]$	$v_D [\text{km/s}]$	$p [\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}]$	$\Delta p [\%]$
10^{16}	10^4	5.000	$3.3452 \cdot 10^{-8}$	1.402	$3.2838 \cdot 10^{-8}$	1.87
10^{15}	10^5	16.00	$1.0705 \cdot 10^{-8}$	4.3125	$1.0098 \cdot 10^{-8}$	6.00
10^{14}	10^6	50.00	$3.3452 \cdot 10^{-9}$	1.2470	$2.9200 \cdot 10^{-9}$	14.6

$N [\text{m}^{-3}]$	$T [\text{K}]$	$E [\text{J m}^{-3}]$	$T [\text{K}]$	$E [\text{J m}^{-3}]$	$\Delta E [\%]$
10^{16}	10^4	$2.3617 \cdot 10^{-3}$	$1.007 \cdot 10^4$	$2.3181 \cdot 10^{-3}$	1.88
10^{15}	10^5	$2.3637 \cdot 10^{-3}$	$1.008 \cdot 10^5$	$2.3189 \cdot 10^{-3}$	1.93
10^{14}	10^6	$2.3617 \cdot 10^{-3}$	$1.0173 \cdot 10^6$	$2.3358 \cdot 10^{-3}$	1.11

Tabelle 4.5: Relaxation eines driftenden Protonen - He^{2+} - Plasmas

Die Tabelle 4.5 stellt die Ergebnisse der Testrechnungen für das Protonen - He^{2+} - Plasma dar. Die Spalte N_p gibt die Protonendichte an, für die Dichte der He^{2+} - Ionen gilt $N_{\text{He}^{2+}} = 0.1 \cdot N_p$. Ansonsten entspricht ihr Aufbau dem der Tabelle 4.4.

Die Energieerhaltung ist mit einem Fehler von 1% erneut sehr gut erfüllt. Im stoßdominierten Plasma gilt auch eine sehr gute Impulserhaltung, die sich jedoch mit abnehmender Plasmadichte verschlechtert. Die gute Impulserhaltung im dichten Plasma basiert darauf, daß durch den Ansatz (3.53) der Mittelung der Momente bei der Berechnung eines Coulomb - Stoßprozesses die Geschwindigkeit im thermischen Gleichgewicht, die durch den Impulssatz bestimmt wird, als Geschwindigkeit der Stoßpartner angesetzt wird. Aufgrund der Neigung der Coulomb - Stöße, die Werte der Momente der Verteilungsfunktionen, mit denen sie berechnet werden, herzustellen, wird dann Impulserhaltung erzwungen.

Im dünneren Plasma dagegen werden die wahren Werte von $v_{j,D}$ verwendet. Wie in Abschnitt 2.4.2 erläutert wurde, ist dies physikalisch richtig. Allerdings basiert die Berechnung der Coulomb - Stöße für reduzierte Verteilungen auf einigen Annahmen, von denen sich besonders die Ersetzung der Verteilungsfunktion der Stoßpartner durch eine isotrope Maxwellverteilung negativ auf die Impulserhaltung auswirken kann.

Zur Verdeutlichung des Problems werden zwei Teilchensorten A und B betrachtet. Wenn A maxwellverteilt ist und B von der Maxwellverteilung abweicht, dann werden die Stöße von A mit B unter der Annahme einer Maxwellverteilung für B berechnet, während sich diese

Annahme auf die Berechnung der Stöße von B mit A nicht auswirkt, da sie aufgrund der Maxwellverteilung von A exakt gilt.

Eigentlich sollten die Stöße zwischen A und B den Gesamtimpuls der beiden Teilchensorten nicht ändern, der Impulsübertrag von B auf A ist bis auf das Vorzeichen derselbe wie von A auf B. In diesem Beispiel wird der Impulsübertrag bei Stößen von B mit A korrekt berechnet. Dies gilt aber nicht für die Stöße von A mit B. Da das Landau – Stoßintegral (2.103) mit den Rosenbluth – Potentials (2.105), (2.106) nicht nur von der Geschwindigkeit \vec{v} , sondern auch von der der Stoßpartner \vec{v}_j abhängt, kann es vorkommen, daß der Impulsübertrag bei Stößen mit der wirklichen Verteilungsfunktion nicht derselbe ist wie mit einer Maxwellverteilung gleicher Dichte, Driftgeschwindigkeit und Temperatur. Dadurch kann es zu einer Verletzung der Impulserhaltung kommen.

Eine Korrektur des Fehlers ist nicht möglich. Wie in Abschnitt 2.4.2 und in Anhang A dargestellt wird, ist die Annahme maxwellverteilter Stoßpartner zur Entwicklung eines Coulomb – Stoßoperators für reduzierte Verteilungen unvermeidlich. Eine nachträgliche Korrektur analog zur Korrektur auf Teilchenzahlerhaltung scheidet auch aus, da es dazu notwendig wäre, die paarweisen Impulsüberträge zwischen den verschiedenen Ionensorten zu bestimmen. Durch die nach Kapitel 3.2.2 notwendige Verwendung eines impliziten Verfahrens zur Berechnung der $(\frac{\delta F_{j,k}}{\delta t})_{Coul.}$ ist es aber nicht ohne weiteres möglich, die Beiträge der Stöße mit verschiedenen Teilchensorten voneinander zu trennen.

Daher lassen sich die Fehler bei der Impulserhaltung, die im koronalen Plasma immerhin die Größenordnung 10^{-1} erreichen, nicht vermeiden. Da sie jedoch bevorzugt in einem dünnen, stoßarmen Plasma auftreten, erscheinen sie durchaus vertretbar. Denn das hier behandelte Szenario einer durch Coulomb – Stöße zum Stillstand gebrachten gegenseitigen Drift der Ionensorten ist für das angestrebte kinetische Modell der Sonnenkorona etwas unrealistisch. Die Verteilungsfunktionen beider Teilchensorten unterliegen keinen anderen Einflüssen als den Coulomb – Stößen und erfahren eine erhebliche Veränderung ihrer Driftgeschwindigkeit, die sich aufgrund der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Coulomb – Stöße nicht gleichmäßig auf alle v auswirkt und die $F_k(v)$ so deformiert.

Bei der numerischen Simulation dagegen liegt der unteren Rand des Rechenfeldes nach Abbildung 3.1 in einem relativ kühlen, dichten und damit stoßdominierten Plasma. Es gibt keine gegenseitige Drift der Ionen. Auch die Anfangsbedingungen sehen gleiche Driftgeschwindigkeiten für alle Teilchensorten vor. Solange das Plasma durch die Coulomb – Stöße dominiert wird, bleiben die Verteilungsfunktionen annähernd Maxwellsch, so daß die Annahme von Maxwellverteilungen für die Stoßpartner in guter Näherung gilt und keine Verletzungen der Impulserhaltung verursacht. Wenn das Plasma dünner wird, können sich zwar gegenseitige Driften der Ionen entwickeln, solange die Verteilungsfunktionen zumindest in ihrem Kern aber noch in guter Näherung einer Maxwellverteilung entsprechen, wird auch die Impulserhaltung gelten. Erst wenn sich in einem sehr dünnen Plasma deutliche Abweichungen von Maxwellverteilungen ausbilden, können die Coulomb – Stöße Fehler bei der Impulserhaltung liefern. Doch dann spielen sie in der Impulsgleichung nur eine untergeordnete Rolle. Da die in der Tabelle 4.5 genannten Fehler bei der Impulserhaltung eher in der Größenordnung 10^{-1} als 1 liegen, wird die Coulomb – Reibung zwischen den Ionensorten auch dann noch im wesentlichen richtig beschrieben.

Die relativ großen Fehler bei niedriger Plasmadichte sind demnach nicht signifikant, so daß nicht nur von einer guten Energie-, sondern auch von einer guten Impulserhaltung bei der Berechnung

der Coulomb – Stöße ausgegangen werden darf.

Abbau von Anisotropien mehrerer Ionensorten

Im vorletzten Abschnitt wurde der Abbau von Temperaturanisotropien in einem reinen Protonenplasma untersucht. Jetzt sollen diese Rechnungen auf den Fall eines aus Protonen und He^{2+} - Ionen mit jeweils unterschiedlichen T_{\parallel} und T_{\perp} bestehenden Plasmas verallgemeinert werden. Dabei befinden sich die Teilchensorten zunächst relativ zueinander in Ruhe.

Das Verhältnis zwischen Protonen- und Heliumdichte ist 10:1, d.h. es gilt $N_{\text{He}^{2+}} = 0.1 \cdot N_p$. Es werden wieder typische Dichten und Temperaturen der Chromosphäre, der Übergangszone und der Korona betrachtet.

Zuerst wird ein Satz von Rechnungen mit $T_{\perp} > T_{\parallel}$ durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.6 aufgelistet. Die Werte für $T_{p,\parallel}$ stehen in der Tabelle, für die übrigen Temperaturen gilt: $T_{p,\perp} = 1.7 \cdot T_{p,\parallel}$, $T_{\text{He}^{2+},\parallel} = 1.2 \cdot T_{p,\parallel}$ und $T_{\text{He}^{2+},\perp} = 2 \cdot T_{p,\parallel}$.

$N [\text{m}^{-3}]$	$T_{p,\parallel} [\text{K}]$	$E [\text{J m}^{-3}]$	$T [\text{K}]$	$E [\text{J m}^{-3}]$	$\Delta E [\%]$
10^{16}	10^4	$3.3964 \cdot 10^{-3}$	$1.4981 \cdot 10^4$	$3.4129 \cdot 10^{-3}$	0.5
10^{15}	10^5	$3.3964 \cdot 10^{-3}$	$1.4940 \cdot 10^5$	$3.4034 \cdot 10^{-3}$	0.2
10^{14}	10^6	$3.3964 \cdot 10^{-3}$	$1.4648 \cdot 10^6$	$3.3368 \cdot 10^{-3}$	1.8

Tabelle 4.6: Relaxation eines Bi-Maxwell - verteilten Protonen - He^{2+} – Plasmas

Die linke Seite der Tabelle gibt die Anfangsbedingungen an, auf der rechten Seite stehen die Werte für die gemeinsame Temperatur der Ionen und die Energiedichte, die sich im Laufe des Relaxationsvorgangs eingestellt haben.

Bei der Impulserhaltung tritt kein Fehler auf, das Plasma bleibt im Rahmen der Rechengenauigkeit in Ruhe. Daher sind keine Werte für die Driftgeschwindigkeit v_D tabelliert. Die Fehler bei der Energieerhaltung sind wie bei dem Test mit einer Plasmakomponente sehr klein und liegen maximal bei der Größenordnung 1%.

Anschließend wird noch ein Satz von Rechnungen mit $T_{\perp} < T_{\parallel}$ durchgeführt. Die Ergebnisse stehen in der Tabelle 4.7. Auch dort sind die Werte für $T_{p,\parallel}$ aufgelistet, für die übrigen Temperaturen gilt: $T_{p,\perp} = 0.8 \cdot T_{p,\parallel}$, $T_{\text{He}^{2+},\parallel} = 1.1 \cdot T_{p,\parallel}$ und $T_{\text{He}^{2+},\perp} = 0.6 \cdot T_{p,\parallel}$.

$N [\text{m}^{-3}]$	$T_{p,\parallel} [\text{K}]$	$E [\text{J m}^{-3}]$	$T [\text{K}]$	$E [\text{J m}^{-3}]$	$\Delta E [\%]$
10^{16}	$2 \cdot 10^4$	$3.9073 \cdot 10^{-3}$	$1.7073 \cdot 10^4$	$3.8893 \cdot 10^{-3}$	0.5
10^{15}	$2 \cdot 10^5$	$3.9073 \cdot 10^{-3}$	$1.7185 \cdot 10^5$	$3.9150 \cdot 10^{-3}$	0.2
10^{14}	$2 \cdot 10^6$	$3.9073 \cdot 10^{-3}$	$1.7413 \cdot 10^6$	$3.9669 \cdot 10^{-3}$	1.5

Tabelle 4.7: Relaxation eines Bi-Maxwell - verteilten Protonen - He^{2+} – Plasmas

Auch bei $T_{\perp} < T_{\parallel}$ ist die Energieerhaltung mit Fehlern im Bereich von 1% sehr gut erfüllt. Die Fehler bei der Impulserhaltung liegen erneut im Bereich der numerischen Genauigkeit. Es gibt keine prinzipielle Abhängigkeit von der Art der Anisotropie, die Energieerhaltung wird in beiden Fällen sehr gut eingehalten.

Allgemein: Anisotropien und gegenseitige Drift

Bei den bisherigen Rechnungen wurden die Effekte von Temperaturanisotropien und einer gegenseitigen Drift der Ionensorten getrennt untersucht. Abschließend soll der allgemeine Fall zweier gegeneinander driftender Ionensorten mit jeweils anisotropen Verteilungsfunktionen behandelt werden.

Dazu werden die Rechnungen des letzten Abschnitts wiederholt. Jetzt werden zusätzlich die schon vom vorletzten Abschnitt bekannten Driftgeschwindigkeiten eingeführt.

Die Tabelle 4.8 enthält die Ergebnisse eines ersten Satzes von Rechnungen mit $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Auf der linken Seite stehen die Anfangsbedingungen für die Protonendichte N_p und die parallele Protonentemperatur $T_{p,\parallel}$. Driftgeschwindigkeiten beziehen sich auf das anfängliche Ruhesystem der Protonen, daher steht nur $v_{He^{2+},D}$ in der Tabelle. Für die Dichte der He^{2+} - Ionen gilt wieder $N_{He^{2+}} = 0.1 \cdot N_p$. Die übrigen Temperaturen sind folgendermaßen definiert: $T_{p,\perp} = 1.7 \cdot T_{p,\parallel}$, $T_{He^{2+},\parallel} = 1.2 \cdot T_{p,\parallel}$, $T_{He^{2+},\perp} = 2 \cdot T_{p,\parallel}$

N_p [m ⁻³]	$T_{p,\parallel}$ [K]	$v_{He^{2+},D}$ [km/s]	p [kg m ⁻² s ⁻¹]	v_D [km/s]	p [kg m ⁻² s ⁻¹]	Δp [%]
10^{16}	10^4	5.000	$3.3452 \cdot 10^{-8}$	1.4143	$3.3118 \cdot 10^{-8}$	1.01
10^{15}	10^5	16.00	$1.0705 \cdot 10^{-8}$	4.2543	$9.9620 \cdot 10^{-9}$	7.45
10^{14}	10^6	50.00	$3.3452 \cdot 10^{-9}$	13.552	$3.1734 \cdot 10^{-9}$	5.42
N [m ⁻³]	T [K]	E [J m ⁻³]	T [K]	E [J m ⁻³]	ΔE [%]	
10^{16}	10^4	$3.4801 \cdot 10^{-3}$	$1.5045 \cdot 10^4$	$3.4508 \cdot 10^{-3}$	0.85	
10^{15}	10^5	$3.4821 \cdot 10^{-3}$	$1.5057 \cdot 10^5$	$3.4512 \cdot 10^{-3}$	0.89	
10^{14}	10^6	$3.4801 \cdot 10^{-3}$	$1.4875 \cdot 10^6$	$3.4102 \cdot 10^{-3}$	2.05	

Tabelle 4.8: Relaxation eines driftenden Protonen - He^{2+} – Plasmas

Auf der rechten Seite stehen wieder die sich einstellende Temperatur und Driftgeschwindigkeit, Gesamtimpuls und -energie sowie die relativen Fehler bei der Impuls- und Energieerhaltung. Die Fehler liegen im selben Bereich wie bei den getrennten Untersuchungen von Impulsausgleich und Temperatur - Isotropisierung.

Ein zweiter Satz von Rechnungen mit Temperaturanisotropien $T_{\perp} < T_{\parallel}$ liefert ein ähnliches Ergebnis. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 4.9 aufgelistet. Es ist wieder $N_{He^{2+}} = 0.1 \cdot N_p$, und für die Temperaturen gilt: $T_{p,\perp} = 0.8 \cdot T_{p,\parallel}$, $T_{He^{2+},\parallel} = 1.1 \cdot T_{p,\parallel}$ und $T_{He^{2+},\perp} = 0.6 \cdot T_{p,\parallel}$

N_p [m ⁻³]	$T_{p,\parallel}$ [K]	$v_{He^{2+},D}$ [km/s]	p [kg m ⁻² s ⁻¹]	v_D [km/s]	p [kg m ⁻² s ⁻¹]	Δp [%]
10^{16}	$2 \cdot 10^4$	5.000	$3.3452 \cdot 10^{-8}$	1.4126	$3.3079 \cdot 10^{-8}$	1.13
10^{15}	$2 \cdot 10^5$	16.00	$1.0705 \cdot 10^{-8}$	4.0848	$9.5653 \cdot 10^{-9}$	11.9
10^{14}	$2 \cdot 10^6$	50.00	$3.3452 \cdot 10^{-9}$	12.105	$2.8346 \cdot 10^{-9}$	18.0
N [m ⁻³]	T [K]	E [J m ⁻³]	T [K]	E [J m ⁻³]	ΔE [%]	
10^{16}	$2 \cdot 10^4$	$3.9909 \cdot 10^{-3}$	$1.7183 \cdot 10^4$	$3.9378 \cdot 10^{-3}$	1.35	
10^{15}	$2 \cdot 10^5$	$3.9929 \cdot 10^{-3}$	$1.7201 \cdot 10^5$	$3.9380 \cdot 10^{-3}$	1.39	
10^{14}	$2 \cdot 10^6$	$3.9909 \cdot 10^{-3}$	$1.7598 \cdot 10^6$	$4.0263 \cdot 10^{-3}$	0.88	

Tabelle 4.9: Relaxation eines driftenden Protonen - He^{2+} – Plasmas

Auch bei der Temperaturanisotropie $T_{\perp} < T_{\parallel}$ liegen die Fehler der Energie- und Impulserhaltung in derselben Größenordnung wie bei der getrennten Behandlung des Abbaus von Geschwindigkeitsunterschieden und Temperaturunterschieden bzw. -anisotropien.

Die beiden Sätze von Rechnungen zeigen, daß durch das gleichzeitige Auftreten von gegenseitiger Drift und von Temperaturanisotropien keine neuen Fehler bei der Impuls- oder Energieerhaltung auftreten.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß ein Plasma nur unter dem Einfluß der Coulomb – Stöße unter guter Impuls- und Energieerhaltung in das thermodynamische Gleichgewicht mit maxwellverteilten Verteilungsfunktionen gleicher Temperatur und Driftgeschwindigkeit überführt wird.

Die Fehler, die beim Abbau signifikanter Abweichungen von isotropen Maxwellverteilungen auftreten, liegen typischerweise in der Größenordnung 1%. Angesichts des aufwendigen Verfahrens zur Berechnung der Coulomb – Stöße nach Anhang A ist dies ein sehr guter Wert. Auch in sehr stoßdominierten Plasmen treten keine größeren Fehler auf. In einem dünnen Plasma können aufgrund von nicht-Maxwellschen Verteilungsfunktionen Fehler der Ordnung 10^{-1} bei der Impulserhaltung auftreten, doch sind solche Verteilungen in der numerischen Simulation nur bei sehr schwachen Coulomb – Stößen zu erwarten, die nur eine untergeordnete Rolle in der Bewegungsgleichung der Teilchen spielen. Ein Fehler der Ordnung 10^{-1} bedeutet in dem Fall, daß die schwachen Effekte der Coulomb – Stöße immer noch im wesentlichen richtig beschrieben werden.

4.2 Simulationsrechnungen mit einem kalten Plasma

Nach den Tests der Coulomb – Stöße können nun die Erhaltungseigenschaften des gesamten numerischen Verfahrens untersucht werden. Das kinetische Modell soll dazu verwendet werden, die Wirkung von Wellen auf die Verteilungsfunktionen der Ionen in der Korona zu berechnen und so Einblicke in den Heizungsprozeß zu gewinnen. Um sicherzugehen, daß diese Wirkung nicht auf numerischen Artefakten basiert, ist es sinnvoll, zunächst Simulationsrechnungen für ein nicht geheiztes Plasma durchzuführen. Das Plasma erhält dann keinen Energiezuwachs durch Absorption von Wellen, so daß nicht nur die Erhaltung der Teilchenzahl, sondern auch die der Energie überprüft werden kann.

Um zu testen, ob durch die numerische Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32) Energie oder Teilchen erzeugt werden, wird ein mit relativ hoher Geschwindigkeit in eine sich aufweitende Flußröhre strömendes Plasma betrachtet. Die Geometrie der Flußröhre ist dem Modell eines koronalen Trichters nach Hackenberg et al. (1999) nachempfunden, allerdings werden hier kleinere Längenskalen verwendet, um die Abmessungen des Rechenfeldes und damit den Rechenaufwand für die Tests klein zu halten.

Die Abbildung 4.1 stellt den Flußröhrenradius als Funktion der Höhe dar, die der Ortskoordinate s in der Simulation entspricht. Das Rechenfeld erstreckt sich über eine Höhe von 1000 km, der Flußröhrenquerschnitt vergrößert sich dabei etwa um einen Faktor 10.

Die Testrechnungen werden mit einem Protonenplasma durchgeführt, das am unteren Rand des Rechenfeldes eine Temperatur von 10^4 K aufweist. Für die Schwerebeschleunigung wird

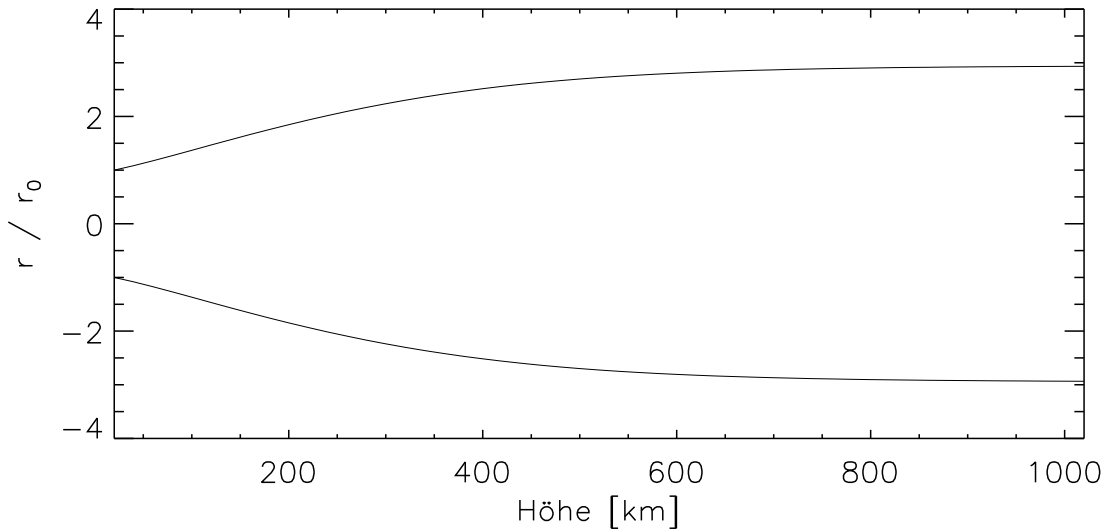


Abbildung 4.1: Die Geometrie der Flußröhre: Radius als Funktion der Höhe

der Wert $g = 274 \text{ m/s}^2$ der Sonnenoberfläche verwendet. Für eine Elektronentemperatur, die der Protonentemperatur entspricht, kompensiert das elektrische Feld (2.37) die Wirkung der Schwerkraft auf die Protonen zur Hälfte, so daß sich eine Druckskalenhöhe von rund 600 km ergibt. Das Rechenfeld erstreckt sich damit über 1.6 Skalenhöhen.

Wenn die numerische Rechnung einen stationären Endzustand gefunden hat, dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \phi}{\partial s}$, daß der Teilchenfluß (vgl. Gleichung (3.22))

$$\phi(s) = A(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v F_0(s, v) dv$$

im ganzen Rechenfeld konstant ist. Eine Variation von $\phi(s)$ im stationären Zustand, d.h. $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ deutet auf eine numerische Teilchenerzeugung oder -vernichtung hin.

Dementsprechend folgt aus der Energieerhaltung, daß der aus den Beiträgen der Flüsse an potentieller, kinetischer und innerer Energie sowie dem Wärmestrom q zusammengesetzte Energiefluß

$$\phi_E = A \left(v_{ph} E_S + \sum_j N_j v_{j,D} \left(\frac{m_j}{2} (v_{j,D}^2 + 3V_{j,\parallel}^2 + 2V_{j,\perp}^2) - \int_0^s (m_j g + q_j E) ds' \right) + q_j \right) \quad (4.5)$$

ebenfalls konstant sein muß. Der Energiefluß (4.5) enthält zusätzlich noch den Energiestrom der Wellen, doch bei den in diesem Abschnitt vorgestellten Rechnungen gibt es keine Wellenenergie, $E_S \equiv 0$.

Am unteren Rand tritt das Plasma mit einer Geschwindigkeit von 4.5 km/s in das Rechenfeld ein. Dies entspricht etwa $0.5 \cdot v_{th}$ und ist damit für ein chromosphärisches Plasma relativ hoch. Doch das Ziel dieser Rechnungen ist die Untersuchung der Erhaltung der Flüsse ϕ und ϕ_E , und Fehler sind dabei gerade bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten zu erwarten. Im ruhenden Plasma sind diese Flüsse trivialerweise gleich Null.

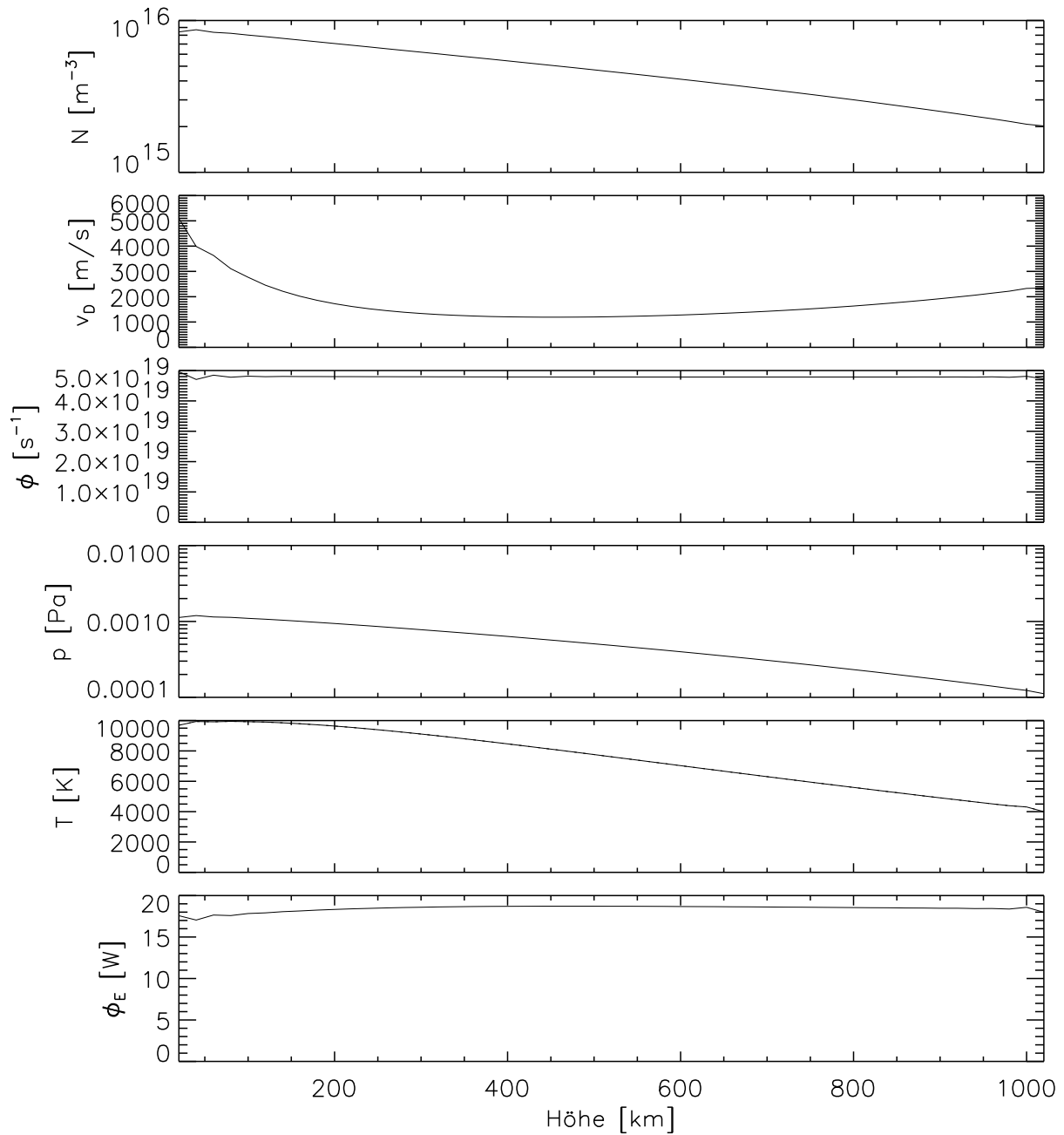


Abbildung 4.2: Strömung eines ungeheizten Protonenplasmas in eine sich aufweitende Flußröhre. Simulationszeit: $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$, Dichte am unteren Rand: $N = 10^{16} \text{ m}^{-3}$

Die Abbildung 4.2 zeigt den stationären Endzustand einer Simulationsrechnung, bei der am unteren Rand eine Protonendichte von $N = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ vorgegeben wurde. Es ist das Ergebnis nach einer Simulationszeit von $t = 20.000 \text{ s}$ dargestellt. Ausgaben zu verschiedenen Zeitpunkten zeigen, daß tatsächlich ein stationärer Zustand erreicht ist. Die Zeit t kann der Transitzeit T_t eines Teilchens auf einer ballistischen Flugbahn vom unteren Rand des Rechenfeldes zum

Scheitelpunkt am oberen Rand und zurück zum unteren Rand

$$T_t = 2 \sqrt{\frac{2H}{g + \frac{q}{m}E}} \quad (4.6)$$

gegenüber gestellt werden. Für das hier diskutierte Rechenfeld gilt $T_t = 241.65$ s und damit $t = 82.8 T_t$. Die Simulationszeit ist also groß gegenüber der Transitzeit, das numerische System hat seine Anfangsbedingung “vergessen” und Zeit genug gehabt, einen Endzustand zu finden.

Von besonderem Interesse sind die Höhenprofile der Flüsse ϕ und ϕ_E . Der Teilchenfluß ϕ bleibt im ganzen Rechenfeld in hervorragender Weise konstant. Damit hat sich der Ansatz (3.25) zur Berechnung der räumlichen Ableitung $\frac{\partial F_k}{\partial s}$ bewährt, im Gegensatz zur auf dem einfachen Upwind – Verfahren (3.21) basierenden Abbildung 3.3 ist nicht die geringste “Welle” in $\phi(s)$ zu erkennen.

Auch der Energiefluß ϕ_E ist in sehr guter Näherung eine Konstante. Zwar gibt es eine geringfügige Variation, aber angesichts der Tatsache, daß ϕ_E durch den Wärmestrom q auf Momenten dritter Ordnung basiert, ist der Fehler sehr gering.

Die Abbildung 4.2 stellt ferner die Teilchendichte N , die Driftgeschwindigkeit v_D , den Druck p und die Temperatur T als Funktion der Ortskoordinate s dar. Die Temperatur fällt annähernd linear ab, wobei der Temperaturgradient etwa dem adiabatischen Wert von 6.6 K/km entspricht. Das dichte Plasma kühlt sich in der Flußröhre also annähernd adiabatisch mit der Höhe ab.

Da die Driftgeschwindigkeit v_D im ganzen Rechenfeld deutlich kleiner als die thermische Geschwindigkeit ist, fallen die Dichte N und der Druck p barometrisch ab. Zum oberen Rand des Rechenfeldes hin verschärfen sich die logarithmischen Gradienten, da die Druckskalenhöhe mit der adiabatisch abnehmenden Temperatur sinkt.

Die Geschwindigkeit v_D fällt im unteren Bereich des Rechenfeldes aufgrund des sich vergrößernden Flußröhrenquerschnitts A ab, da $\phi = N v_D A$ konstant bleibt. Im oberen Bereich steigt v_D wieder an, da die Dichte N mit s abnimmt und der Flußröhrenquerschnitt nach Abbildung 4.1 konstant bleibt.

Die Rechnung mit einer chromosphärischen Dichte zeigt demnach eine sehr gute Erhaltung von Teilchenzahl und Energie. Um zu überprüfen, ob dies auch für weniger stoßdominierte Plasmen gilt, wird die Rechnung mit niedrigeren Dichten wiederholt.

Die Abbildung 4.3 zeigt ein Ergebnis, das mit einer Dichte von $N = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ am unteren Rand des Rechenfeldes gewonnen wurde. Ansonsten ist sie mit der vorherigen Rechnung identisch, auch die Simulationszeit beträgt wieder $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$.

Es ist bis auf die unterschiedlichen Zahlenwerte für die Dichte und die Flüsse ϕ und ϕ_E kein Unterschied zur Abbildung 4.2 zu erkennen. Auch hier gibt es eine hervorragende Teilchen- und Energieerhaltung, die Temperatur fällt immer noch annähernd adiabatisch ab, und auch die Dichte-, Geschwindigkeits- und Druckprofile haben sich nicht verändert.

Um den Effekt einer niedrigeren Dichte zu untersuchen, wird noch eine Rechnung mit einer Dichte von $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ am unteren Rand durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

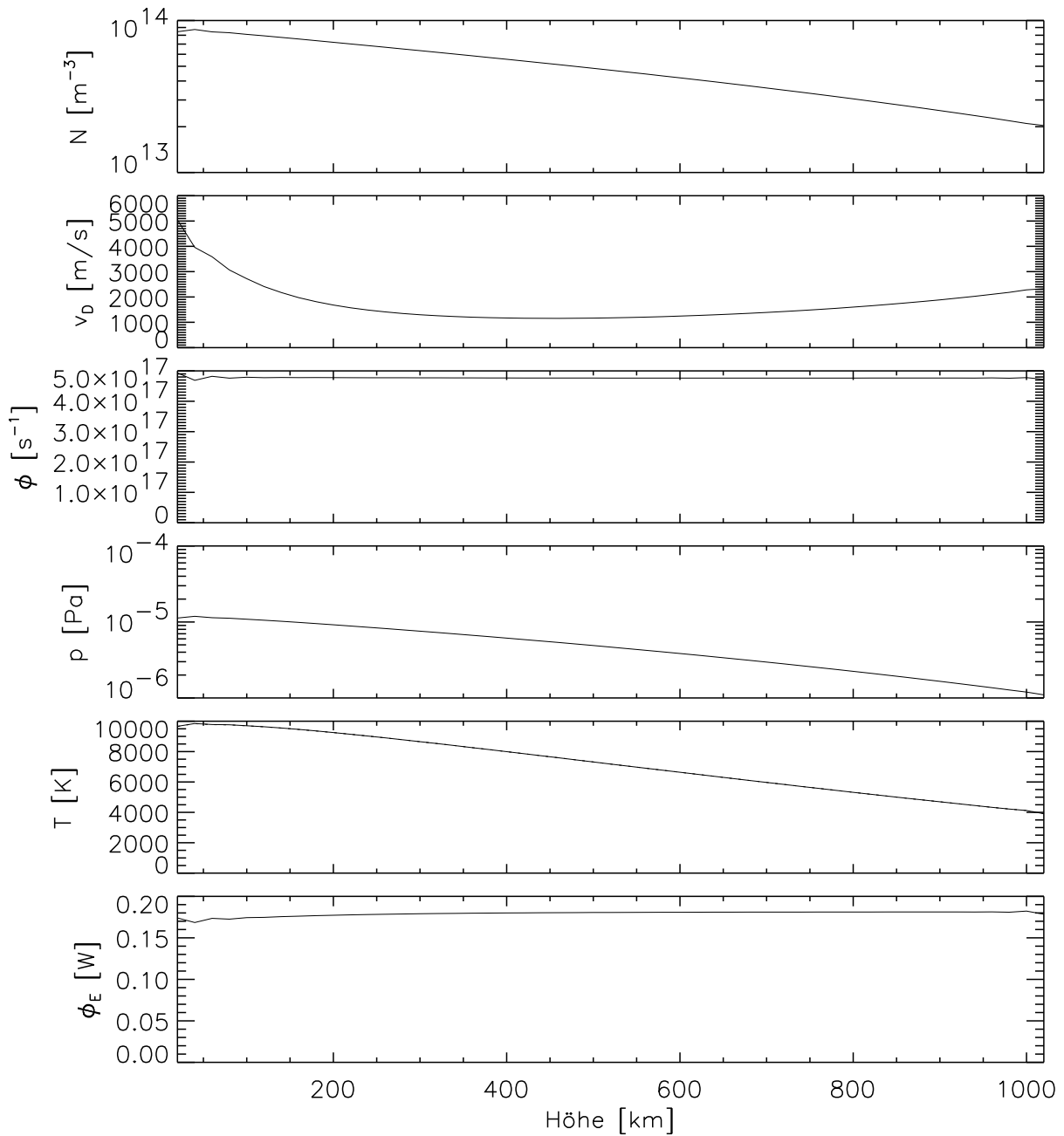


Abbildung 4.3: Strömung eines ungeheizten Protonenplasmas in eine sich aufweitende Flußröhre. Simulationszeit: $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$, Dichte am unteren Rand: $N = 10^{14} \text{ m}^{-3}$

Es gibt nach wie vor eine sehr gute Erhaltung des Teilchen- und Energieflusses. Nur beim Temperaturverlauf sind Veränderungen gegenüber den beiden vorhergehenden Rechnungen zu erkennen.

Die Temperatur sinkt auch hier mit der Höhe ab, allerdings ist der Temperaturgradient jetzt schwächer als der adiabatische Gradient. Dies ist ein Hinweis darauf, daß in dem dünnen Plasma Wärmeleitung eine wichtige Rolle spielt. Im Bereich des oberen Randes durchläuft die Temperatur ein Minimum und steigt zum Rand hin wieder leicht an. Die Ursache hierfür liegt in der

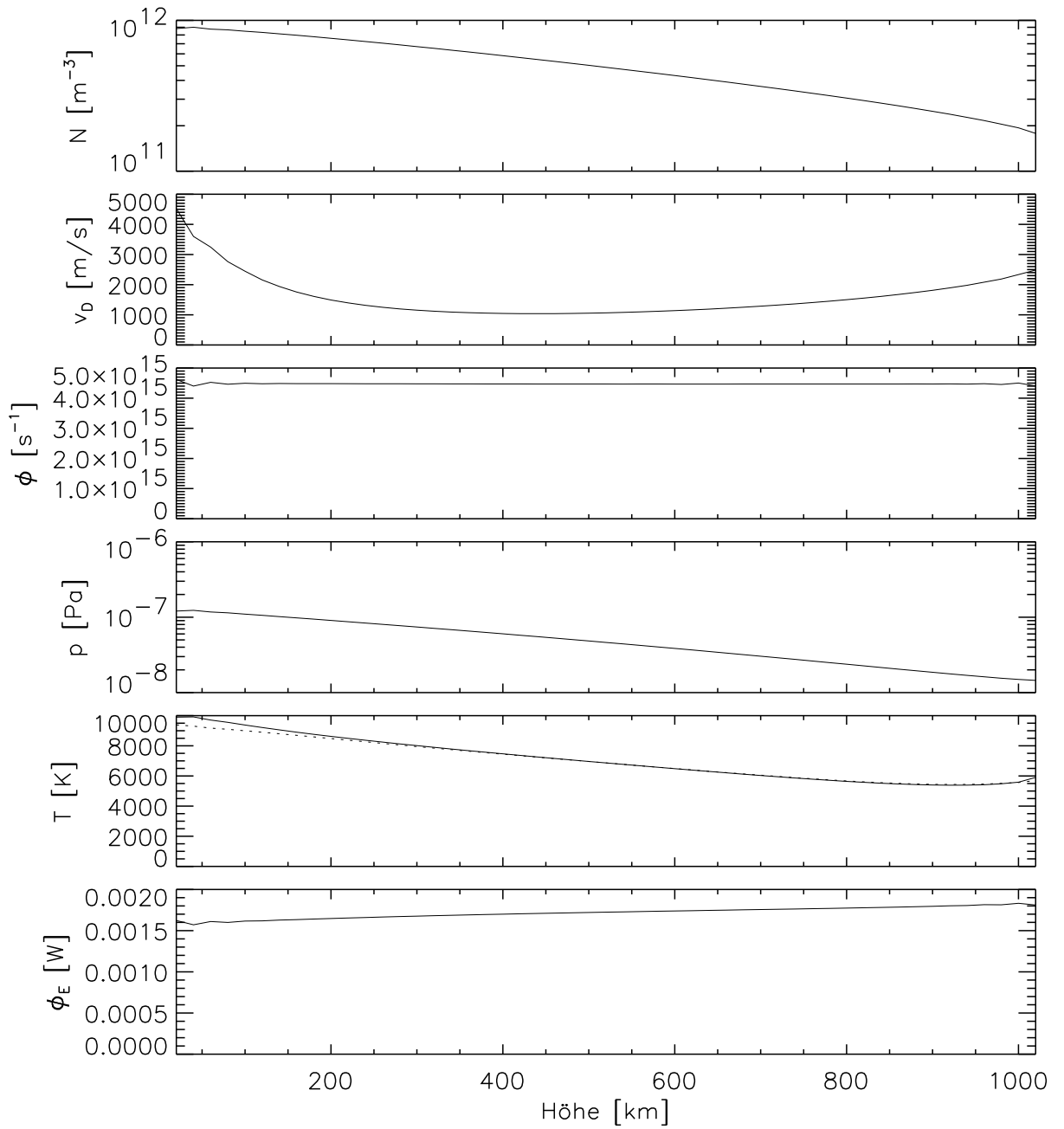


Abbildung 4.4: Strömung eines ungeheizten Protonenplasmas in eine sich aufweitende Flußröhre. Temperaturplots: T_{\parallel} (durchgezogene Linie), T_{\perp} (gestrichelte Linie), Simulationszeit: $t = 20.000 \text{ s} = 82.8 T_t$, Dichte am unteren Rand: $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$

oberen Randbedingung $T = 6000 \text{ K}$, die in dem der kinetischen Rechnung als Anfangs- und Randbedingung zugrundeliegenden Flüssigkeitsmodell verwendet wurde. Durch die Wärmeleitung dringt die Information über die höhere Temperatur in das Innere des Rechenfeldes ein.

Am unteren Rand ist eine Temperaturanisotropie zu erkennen. Die Abbildung 4.4 stellt die Höhenprofile von T_{\parallel} (durchgezogene Linie) und T_{\perp} (gestrichelte Linie) dar. Es ist eine Erniedrigung von T_{\perp} und damit eine Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} < 1$ festzustellen. Die Ursache dafür

liegt in der sich aufweitenden Geometrie der Flußröhre nach Abbildung 4.1. Ein Plasma, das in eine sich öffnende Flußröhre strömt, erfährt durch die Spiegelkraft eine Fokussierung, d.h. es wird v_{\perp} verkleinert und v_{\parallel} vergrößert. Die Erniedrigung von v_{\perp} führt zu einer Verminderung der thermischen Geschwindigkeit V_{\perp} und folglich von T_{\perp} . Damit weist diese Rechnung einen echten kinetischen Effekt auf, der mit einem einfachen Flüssigkeitsmodell nicht beschreibbar ist.

Insgesamt zeigen die in diesem Abschnitt vorgestellten Testrechnungen, daß das numerische Lösungsverfahren der Vlasov – Gleichung (2.32) in der Lage ist, eine stationäre Lösung der Gleichung zu finden. Es weist eine gute Konvergenz auf. Dabei sind die Erhaltungssätze für Teilchenzahl und Energie sehr gut erfüllt. Im stationären Zustand sind die entsprechenden Flüsse im ganzen Rechenfeld konstant. Es gibt weder Erzeugung noch Vernichtung von Teilchen oder Energie.

4.3 Wirkung eines Temperaturgradienten auf die reduzierten Verteilungsfunktionen

Bei den bisherigen Tests der Erhaltungseigenschaften des numerischen Modells wurden nur die Momente der Verteilungsfunktionen betrachtet, nicht aber die bei dem kinetischen Modell eigentlich interessanten reduzierten Verteilungen $F_k(v)$. Um die Zuverlässigkeit der numerischen Ergebnisse für die F_k zu überprüfen, sind numerische Resultate mit analytischen Lösungen der Vlasov – Gleichung zu vergleichen. Dabei tritt jedoch das Problem auf, daß die Vlasov – Gleichung in der Regel nicht analytisch lösbar ist. In einem stoßfreien Plasma kann sie mit Hilfe des Liouville – Satzes ($\frac{df}{dt} = 0$) ausgehend von den Randbedingungen gelöst werden, doch fehlen dann sowohl die Coulomb – Stöße als auch die Welle - Teilchen – Wechselwirkung.

Doch gerade die Coulomb – Stöße sollten aufgrund ihrer aufwendigen Berechnung nach Anhang A in den Test einbezogen werden. Als ein einfacher Modellfall bietet sich ein Plasma mit einem Temperaturgradienten an, damit der Transportprozeß der Wärmeleitung auf der Ebene der Verteilungsfunktionen detailliert untersucht werden kann. Andere Einflüsse auf die Verteilungsfunktionen, wie die Welle - Teilchen – Wechselwirkung oder auch die Schwerebeschleunigung, werden weggelassen.

Während ein Temperaturunterschied im Plasma aufgrund der damit verbundenen räumlichen Unterschiede der $F_k(s, v)$ zu einer "Schiefe" der Verteilungen und damit zu einem Wärmestrom q führt, tendieren die Coulomb – Stöße dazu, die Verteilungsfunktionen wieder der Maxwellverteilungen anzunähern und den Wärmestrom so zu unterdrücken. Zwischen beiden Effekten stellt sich ein Gleichgewicht ein, in dem die reduzierten Verteilungen in bestimmter Weise von Maxwellverteilungen abweichen und zu einem Wärmestrom q führen.

In den klassischen Arbeiten von Spitzer und Härm (1953) und Cohen et al. (1950) wird die Verteilungsfunktion von Elektronen in einem Plasma mit einem Temperaturgradienten analytisch bestimmt. Nach der Übertragung dieser Ergebnisse auf die reduzierten Verteilungen und auf Stöße zwischen Ionen können kinetische Rechnungen mit ihnen verglichen und die berechneten F_k überprüft werden.

4.3.1 Analytische Ergebnisse nach Spitzer und Härm (1953)

In Spitzer und Härm (1953) wird die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ eines Plasmas mit einem schwachen Temperaturgradienten durch eine Störungsentwicklung

$$f(\vec{v}) = f^0(\vec{v}) + f^1(\vec{v}) \quad (4.7)$$

berechnet. Dabei ist $f^0(\vec{v})$ der ungestörte Grundzustand und daher maxwellverteilt. Das Plasma befindet sich in Ruhe, so daß f^0 nur vom Betrag von \vec{v} abhängt, und auch $f^0(v)$ mit $v = |\vec{v}|$ geschrieben werden kann. Für die Störung $f^1(\vec{v})$ wird folgender Ansatz gemacht:

$$f^1(\vec{v}) = f^0(v) \cdot D\left(\frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}\right) \cdot \cos \theta \quad (4.8)$$

Dabei ist θ der Pitchwinkel mit $\cos \theta = \frac{v_{\parallel}}{v}$. Das Hintergrundmagnetfeld ist homogen und liegt in Richtung des Temperaturgradienten, so daß es nicht in die Rechnung eingeht. Aus Symmetriegründen ist $f^1(\vec{v})$ gyotrop. Die Rechnung gilt auch für ein magnetfeldfreies Plasma, dann ist v_{\parallel} die Geschwindigkeitskomponente in Richtung von ∇T , v_{\perp} entsprechend senkrecht dazu.

Der Störungsparameter D hängt nur vom Betrag der Geschwindigkeit v ab, nicht von ihrer Richtung. Die Richtungsabhängigkeit beschränkt sich auf den Faktor $\cos \theta$. Damit entspricht (4.8) einer Kugelfunktionsentwicklung bis zur 1. Ordnung.

In Cohen et al. (1950) wird aus der Vlasov – Gleichung des hier beschriebenen Plasmas und unter Verwendung einer Fokker – Planck – Gleichung für den Coulomb – Stoßoperator eine Differentialgleichung für den Störungsparameter D hergeleitet. In Spitzer und Härm (1953) wird unter Verwendung der normierten Geschwindigkeit $x = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}$ folgende Form dieser Gleichung verwendet:

$$D''(x) + P(x) D'(x) + Q(x) D(x) = R(x) + S(x) \quad (4.9)$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung lauten:

$$P(x) = -2x - \frac{1}{x} + \frac{2x^2\Phi'(x)}{\Psi} \quad (4.10)$$

$$Q(x) = \frac{1}{x^2} - 2 \frac{Z + \Phi(x) - 2x^3\Phi'(x)}{\Psi} \quad (4.11)$$

$$S(x) = \frac{16}{3\sqrt{\pi}\Psi} \left(xI_3(x) - 1.2xI_5(x) - x^4I_0(x) \cdot (1 - 1.2x^2) \right) \quad (4.12)$$

$$R(x) = -\frac{x^4B}{\Psi}(2.5 - x^2) \quad (4.13)$$

Dabei ist $\Phi(x)$ die Fehlerfunktion und

$$\Psi := \Phi(x) - x\Phi'(x) \quad (4.14)$$

Der Parameter B enthält die Abhängigkeit vom Temperaturgradienten:

$$B = \frac{32\pi\epsilon_0^2k^2T\nabla T}{Ne^4\ln(qC^2)}, \quad (qC^2) = 3\pi\frac{(2\epsilon_0kT)^{3/2}}{\sqrt{N}e^3} \quad (4.15)$$

Bei den $I_n(x)$ handelt es sich um gewichtete Integrale über $D(x)$:

$$I_n(x) = \int_0^x y^n D(y) e^{-y^2} dy \quad (4.16)$$

Durch das Auftreten dieser Integrale handelt es sich bei der Gleichung (4.9) nicht nur um eine Differentialgleichung, sondern sogar um eine Integro - Differentialgleichung. Die Herleitung des Coulomb - Stoßoperators in Kapitel 2.4 basiert ebenso wie die Coulomb - Stöße in Cohen et al. (1950) auf einer Fokker - Planck - Gleichung, so daß die Ergebnisse der analytischen und der numerischen Rechnung gut zu vergleichen sind.

Der so berechnete Störungsparameter $D(x)$ beschreibt jedoch die Verteilung der Elektronen in einem aus Elektronen und Ionen mit der mittleren Ladungszahl

$$Z = \frac{1}{N_e} \sum_j N_j \frac{q_j^2}{e^2} \quad (4.17)$$

bestehenden Plasma, während das numerische Modell die Verteilungsfunktionen von Ionen behandelt. Die Elektronenverteilung wird sowohl von Stößen mit Elektronen als auch mit Ionen beeinflusst, während die Ionenverteilung nur durch die Stöße mit Ionen, aufgrund des geringen Massenverhältnisses $\frac{m_e}{m_i}$ nicht aber mit Elektronen bestimmt wird.

Für den Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen für die F_k wird ein aus Protonen (und Elektronen als neutralisierendem Fluid) bestehendes Plasma verwendet, weitere Ionensorten werden nicht berücksichtigt. Es kann davon ausgegangen werden, daß die Stöße zwischen Elektronen dieselbe Auswirkung auf die Elektronenverteilung haben wie die Stöße zwischen Protonen auf die Protonenverteilung, da es sich in beiden Fällen um Stöße zwischen Teilchen jeweils gleicher Masse und gleicher Ladung handelt. Bei Elektronen und Protonen sind die Ladungen sogar betragsmäßig gleich, so daß das System von Gleichungen (4.9) – (4.16) auf den Effekt der Elektron - Elektron - Stöße zu beschränken ist. Anschließend liefert die Ersetzung $m_e \rightarrow m_p$ eine Differentialgleichung zur Berechnung des Störungsparameters einer Protonenverteilung. Zwar hängt das Gleichungssystem nicht explizit von der Elektronenmasse ab, aber durch die Normierung der Geschwindigkeit auf die thermische Geschwindigkeit gibt es eine implizite Abhängigkeit.

Eine Beschränkung des Systems (4.9) – (4.16) auf Elektron - Elektron - Stöße bedeutet, daß die Wirkung von Elektron - Ion - Stößen entfallen muß. Dies kann durch Manipulation der Ladungszahl Z geschehen. Die Quasineutralität fordert, daß $\sum_j N_j Z_j$ der gegebenen Elektrodendichte entsprechen muß. Die Stärke der Coulomb - Stöße hängt aber über den Vorfaktor Γ_j nach (2.111) wie $N_i \cdot Z_j^2$ von den Z_j ab. Wenn also alle $Z_j \rightarrow 0$ gehen und die N_j der Quasineutralität entsprechend zunehmen, dann geht auch Γ_j gegen 0, die Stöße mit den Ionen werden bedeutungslos.

Der Effekt der Elektron - Ion - Stöße läßt sich also aus den Gleichungen (4.9) – (4.16) eliminieren, indem der Fall $Z \rightarrow 0$ betrachtet wird. Dadurch läßt sich die gesuchte Gleichung für Elektron - Elektron und damit Proton - Proton - Stöße finden. Diese Vorgehensweise ist auch konsistent mit der Feststellung in Spitzer und Härm (1953), daß im anderen Extremfall $Z \rightarrow \infty$ die Elektron - Elektron - Stöße unbedeutend werden und der Grenzfall eines Lorentz - Gases beschrieben wird, in dem nur Stöße der Elektronen mit Ionen berücksichtigt werden.

Lösung der Integro - Differentialgleichung für D

Die Ersetzung $Z \rightarrow 0$ wirkt sich nur auf den Koeffizienten $Q(x)$ nach (4.11) aus, da er als einziger von Z abhängt. Nun ist die Integro - Differentialgleichung 2. Ordnung (4.9) ausgehend von einer geeigneten Randbedingung zu lösen.

Aus dem Störungsansatz (4.8) folgt, daß die Störung f^1 bei einer Richtungsumkehr von \vec{v} ihr Vorzeichen wechselt, was aus Symmetriegründen einleuchtend ist. Daraus ergibt sich die Forderung:

$$D(x = 0) = 0 \quad (4.18)$$

Andernfalls würde sich für kleine v und damit x bei einer Variation des Pitchwinkels θ ein unstetiges Verhalten für $f^1(\vec{v})$ ergeben. Da $x \geq 0$ gilt, ist die Gleichung (4.9) ausgehend von dieser Randbedingung zu lösen.

Da es sich dabei aber um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, wird noch eine weitere Randbedingung, z.B. für $D'(x = 0)$, benötigt. Zur Entwicklung dieser Randbedingung lohnt es sich, sich die Struktur der Gleichung (4.9) genauer anzusehen.

Die linke Seite ist linear in $D(x)$ und seinen Ableitungen. Auf der rechten Seite steht zum einen der Term $S(x)$, der durch Integrale $I_n(x)$ ebenfalls linear in $D(x)$ ist. Zum anderen steht dort $R(x)$, das von $D(x)$ völlig unabhängig ist. Wenn $S(x)$ auf die linke Seite gezogen wird, erhält man eine inhomogene Integro - Differentialgleichung für $D(x)$.

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Die homogene Gleichung erhält man, indem $R \equiv 0$ gesetzt wird. Da es sich bei (4.9) um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, setzt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung aus zwei Basislösungen zusammen. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung muß jedoch die Randbedingung (4.18) erfüllen, wodurch sich die Zahl der unabhängigen Basislösungen auf Eins reduziert.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ergibt sich durch Multiplikation der Basislösung mit einem beliebigen Faktor α . Für die Basislösung stellt es dann keine Einschränkung dar, wenn sie mit Hilfe der zusätzlichen Randbedingung

$$D'(x = 0) = 1 \quad (4.19)$$

berechnet wird. Dieser Ansatz führt zwar nicht zum Ziel, wenn eine Lösung der homogenen Gleichung (4.9) unter der Randbedingung $D(x = 0) = 0$ zwangsläufig die Eigenschaft $D'(x = 0) = 0$ hätte. Doch da es sich als möglich herausstellt, die Gleichung (4.9) mit den Randbedingungen $D(x = 0) = 0$ und $D'(x = 0) = 1$ zu lösen, ist auch sichergestellt, daß es sich dabei um eine Basislösung der homogenen Gleichung handelt.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (4.9) ergibt sich durch die Randbedingung $D(x = 0) = 0$ und zusätzlich

$$D'(x = 0) = 0 \quad (4.20)$$

Die allgemeine Lösung $D_{allg}(x)$ von (4.9) lautet dann:

$$D_{allg}(x) = \alpha \cdot D_{hom}(x) + D_{spez}(x) \quad (4.21)$$

Die Gleichung (4.9) kann trotz ihrer komplizierten Struktur als Integro - Differentialgleichung ausgehend von den Randbedingungen $D(x=0) = 0$ und $D'(x=0) = 0$ bzw. 1 relativ leicht numerisch gelöst werden. Die Lösung erfolgt vom Rand $x_0 = 0$ aus in äquidistanten Schritten Δx für die einzelnen Stellen $x_i = i \cdot \Delta x$. $D(x_1)$ wird mit Hilfe der Randbedingung für D' definiert: $D(x_1) = \Delta x \cdot D'(x=0)$

Für ein beliebiges $x_i (i = 2, 3, \dots)$ werden die Ableitungen von $D(x_i)$ durch einfache Differenzenquotienten $D'(x_i) = \frac{D(x_{i+1}) - D(x_{i-1}))}{2\Delta x}$ und $D''(x_i) = \frac{D(x_{i-1}) - 2D(x_i) + D(x_{i+1}))}{\Delta x^2}$ bestimmt. Wenn bereits alle $D(x_j)$, $j \leq i$, bekannt sind, können die Integrale $I_n(x_i)$ nach (4.16) leicht durch numerische Integration bestimmt werden. Einsetzen der Differenzenquotienten und der Integrale in (4.9) ergibt dann eine Gleichung, die als einzige Unbekannte $D(x_{i+1})$ enthält. Mit ihrer Hilfe kann $D(x_{i+1})$ bestimmt werden.

Damit ist es möglich, ausgehend von den aus den Randbedingungen bestimmten $D(x_0)$ und $D(x_1)$ iterativ alle $D(x_i)$ zu berechnen und die Integro - Differentialgleichung sowohl für den homogenen als auch den speziellen inhomogenen Fall zu lösen.

Durch die Berechnung von $D_{hom}(x)$ und $D_{spez}(x)$ ist die allgemeine Lösung $D_{allg}(x)$ nach (4.21) bekannt. Da diese den beliebigen Faktor α aufweist, beschreibt sie eine ganze Schar von Lösungen. Für ein vorgegebenes Plasma mit einem Temperaturgradienten sollte die Lösung $D(x)$ jedoch eindeutig sein. Daher wird eine weitere Bedingung für $D(x)$ gesucht, die eine Bestimmung von α erlaubt.

Diese Bedingung läßt sich daraus ableiten, daß ein Wärmestrom q nicht mit einer Driftbewegung des Plasmas verbunden ist. Wenn das ungestörte Plasma in Ruhe ist, dann sollte auch die Driftgeschwindigkeit des gestörten Plasmas

$$v_D = \int v_{\parallel} (f^0(\vec{v}) + f^1(\vec{v})) d^3\vec{v}$$

verschwinden. Aufgrund der Gyrotropie sowohl von f^0 als auch von f^1 wird hier nur die Magnetfeld- bzw. ∇T - parallele Komponente der Driftgeschwindigkeit betrachtet. Da $f^0(\vec{v})$ eine ruhende Maxwellverteilung ist, verschwindet der erste Summand. Es bleibt mit dem Störungsansatz (4.8):

$$v_D = \int v_{\parallel} f^0(\vec{v}) \cdot D \left(\frac{v}{\sqrt{2} v_{th}} \right) \cdot \cos \theta d^3\vec{v}$$

Unter Beachtung der Gyrotropie und $\cos \theta = \frac{v_{\parallel}}{v}$ schreibt sich dies in Kugelkoordinaten:

$$v_D = 2\pi \int_0^{\infty} dv v^3 f^0(v) \cdot D \left(\frac{v}{\sqrt{2} v_{th}} \right) \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{4}{3}\pi \int_0^{\infty} dv v^3 f^0(v) \cdot D \left(\frac{v}{\sqrt{2} v_{th}} \right)$$

Aus der Bedingung $v_D = 0$ folgt damit:

$$I_3(\infty) = 0 \quad (4.22)$$

Da sich das Integral $I_3(x)$ linear aus den Beiträgen der Lösungen $D_{hom}(x)$ und $D_{spez}(x)$ zusammensetzt, lassen sich für diese beiden Lösungen Integrale $I_3(\infty)$ berechnen und der Parameter α mit Hilfe von (4.21) und (4.22) berechnen:

$$\alpha = -\frac{I_{3,spez}(\infty)}{I_{3,hom}(\infty)} \quad (4.23)$$

Damit ist eine eindeutige Bestimmung des Störungsparameters $D(x)$ möglich. Die Abhängigkeit von $D(x)$ von dem Temperaturgradienten ∇T beschränkte sich bisher auf den Term B nach (4.15) in der inhomogenen Gleichung. Durch die Wahl (4.23) für den Vorfaktor der Lösung der homogenen Gleichung wird nun auch $D_{hom}(x)$ von ∇T abhängig, was physikalisch sinnvoll ist.

4.3.2 Analytische Ergebnisse für reduzierte Verteilungen

Mit der Lösung der Gleichung (4.9) wurde der Störungsparameter $D(x)$ für die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ gefunden. Das numerische Modell liefert jedoch nur Informationen über die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$. Um einen Vergleich zwischen den Ergebnissen beider Modelle zu ermöglichen, ist es notwendig, aus den gestörten Verteilungen $f(\vec{v})$ reduzierte Verteilungen zu berechnen. Diese Rechnung wird für $F_0(v_{\parallel})$ durchgeführt und ein Störungsparameter $D_0(x)$ hergeleitet.

Aus der Definition (2.2) der reduzierten Verteilungen und dem Störungsansatz (4.8) folgt für die Störung von $F_0(v_{\parallel})$:

$$F_0^1(v_{\parallel}) = 2\pi \int_0^{\infty} f^0(\vec{v}) \cdot D \left(\frac{\sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}}{\sqrt{2} v_{th}} \right) \cdot \frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{\sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}} dv_{\perp} \quad (4.24)$$

Für ein maxwellverteiltes $f^0(\vec{v})$ liefert die Definition der reduzierten Verteilungen:

$$f^0(\vec{v}) = F_0^0(v_{\parallel}) \frac{1}{2\pi v_{th}^2} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{th}^2}} \quad (4.25)$$

Der Störungsparameter $D_0(\frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2} v_{th}})$ für $F_0(v_{\parallel})$ wird definiert durch:

$$F_0^1(v_{\parallel}) = D_0\left(\frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2} v_{th}}\right) \cdot F_0^0(v_{\parallel}) \quad (4.26)$$

Aus den Gleichungen (4.24), (4.25) und (4.26) ergibt sich der gesuchte Ausdruck für D_0 :

$$D_0\left(\frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2} v_{th}}\right) = \frac{v_{\parallel}}{v_{th}^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{th}^2}} \cdot D \left(\sqrt{\frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2v_{th}^2}} \right) \cdot \frac{v_{\perp}}{\sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}} dv_{\perp} \quad (4.27)$$

Die Formel für $D_0(v_{\parallel})$ beinhaltet ein Integral über den nach Spitzer und Härm (1953) berechneten Störungsparameter $D(x)$, das sich von $x = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2} v_{th}}$ bis ∞ erstreckt. Durch die Integration über alle v_{\perp} tragen alle v von $|v_{\parallel}|$ bis ∞ sowie alle Pitchwinkel $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ zu $D_0(v_{\parallel} > 0)$ bei.

4.3.3 Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen

Der auf analytischen Rechnungen basierende Störungsparameter $D_0(v_{\parallel})$ kann zum Test numerischer Ergebnisse verwendet werden. Das für die numerische Rechnung verwendete Plasma weist eine Dichte von $5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ und eine Temperatur von 10^4 K auf. Es wird ein Temperaturgradient

von $\frac{\partial T}{\partial s} = 10^{-3} \text{ K/m}$ vorgegeben. Die betrachtete Flußröhre weist einen konstanten Querschnitt auf, und es gibt weder eine Heizung durch Wellen noch ein Schwere- oder elektrisches Feld. Zusätzlich zum Temperaturgradienten gibt es einen Dichtegradienten, so daß sich der Druck p im Rechenfeld nicht mit der Höhe ändert.

Die Temperatur entspricht chromosphärischen Bedingungen, und die Dichte ist erniedrigt, damit die Coulomb – Stöße schwach genug sind, um leichte Abweichungen der Verteilungsfunktion von einer Maxwellverteilung zuzulassen. Die Höhe des Rechenfeldes kann bei räumlichen Schritten $\Delta s = 10 \text{ km}$ mit 300 km relativ klein gehalten werden. Die hier vorgestellten Ergebnisse für die $F_k(v_{\parallel})$ stammen aus einer Höhe von 200 km und damit etwa aus der Mitte des Rechenfeldes. Auf diese Weise wird ein hinreichend großer Abstand zum oberen und unteren Rand eingehalten, um den Einfluß von Randeffekten gering zu halten.

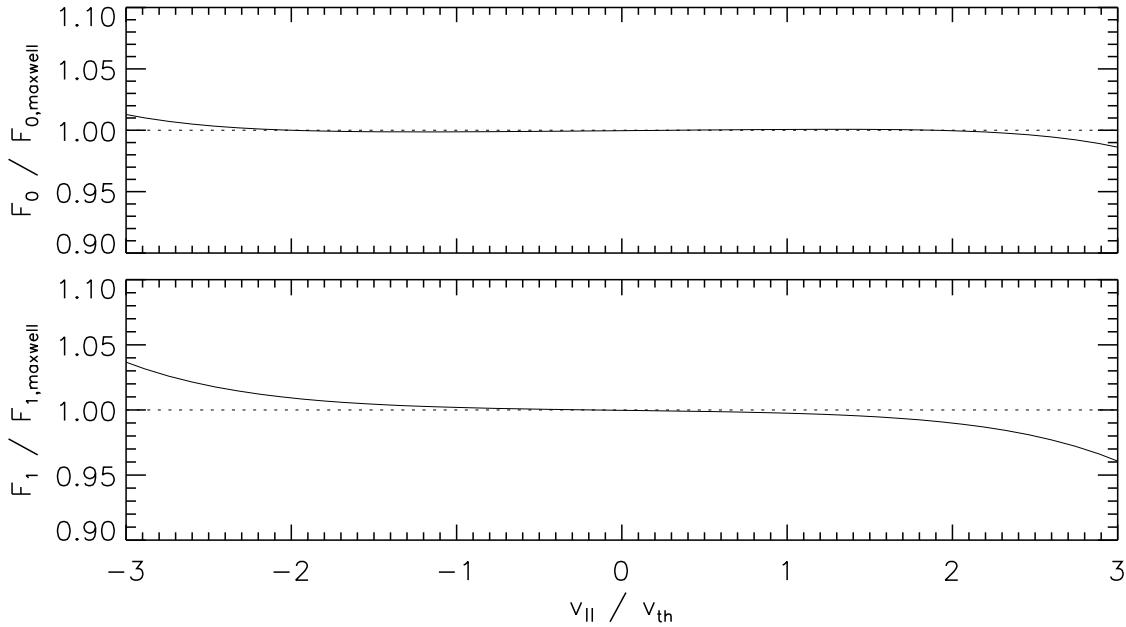


Abbildung 4.5: Auf die Maxwellverteilung normierte reduzierte Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$

Die Abbildung 4.5 stellt die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ auf der Höhe $s = 200 \text{ km}$ dar. Da bei Plots der $F_k(v_{\parallel})$ kein Unterschied zu einer Maxwellverteilung zu erkennen ist, sind die $F_k(v_{\parallel})$ auf eine Maxwellverteilung mit denselben Parametern (N, v_D, T) normiert dargestellt.

Es ist zu erkennen, daß sowohl bei F_0 als auch bei F_1 eine gegenüber der Maxwellverteilung erhöhte Zahl von Teilchen mit Geschwindigkeiten $v_{\parallel} \ll -v_{th}$ von oben nach unten strömt, während bei $v_{\parallel} \gg v_{th}$ die Zahl der von unten nach oben strömenden Teilchen vermindert ist. Dies ist eine typische Signatur der Wärmeleitung, die Temperatur nimmt mit der Höhe zu, so daß die Verteilungsfunktionen nach oben hin breiter werden. Dadurch strömt eine erhöhte Zahl von Teilchen mit hoher Geschwindigkeit von oben nach unten. Entsprechend wird die Verteilung nach unten hin schmaler, so daß die Zahl der mit hoher Geschwindigkeit von unten nach oben strömenden Teilchen vermindert ist. Da es sich bei schnellen Teilchen um energiereiche Teilchen handelt, bedeutet dies einen Energiefluß von oben nach unten, nämlich die Wärmeleitung.

Bei F_1 ist dieser Effekt besser zu erkennen als bei F_0 . Dies liegt daran, daß der Wärmestrom nach (2.12) ein 3. Moment von F_0 ist, aber nur ein 1. Moment von F_1 . F_1 ist nach (2.7) eng mit T_\perp verbunden, so daß $v_\parallel F_1$ einen Fluß an "senkrechter thermischer Energie" beschreibt. Für $v_\parallel < 0$ ist F_1 hier erhöht, für $v_\parallel > 0$ erniedrigt. Eine solch einfache Beziehung ist für F_0 nicht möglich, da das Plasma dann eine Driftgeschwindigkeit $v_D < 0$ aufweisen würde. Die Störung $F_0^1(v_\parallel)$ muß sowohl im Bereich $v_\parallel < 0$ als auch in $v_\parallel > 0$ ihr Vorzeichen wechseln. Dies ist in Abbildung 4.5 zu erkennen.

Die numerischen Ergebnisse für $F_0(v_\parallel) = F_0^1(v_\parallel) + F_0^0(v_\parallel)$ und die Maxwellverteilung $F_0^0(v_\parallel)$ gleicher Dichte, Driftgeschwindigkeit und Temperatur ergeben nach (4.26) einen Störungskoeffizienten $D_{0,num}$:

$$D_{0,num}(v_\parallel) = \frac{F_0(v_\parallel) - F_0^0(v_\parallel)}{F_0^0(v_\parallel)} \quad (4.28)$$

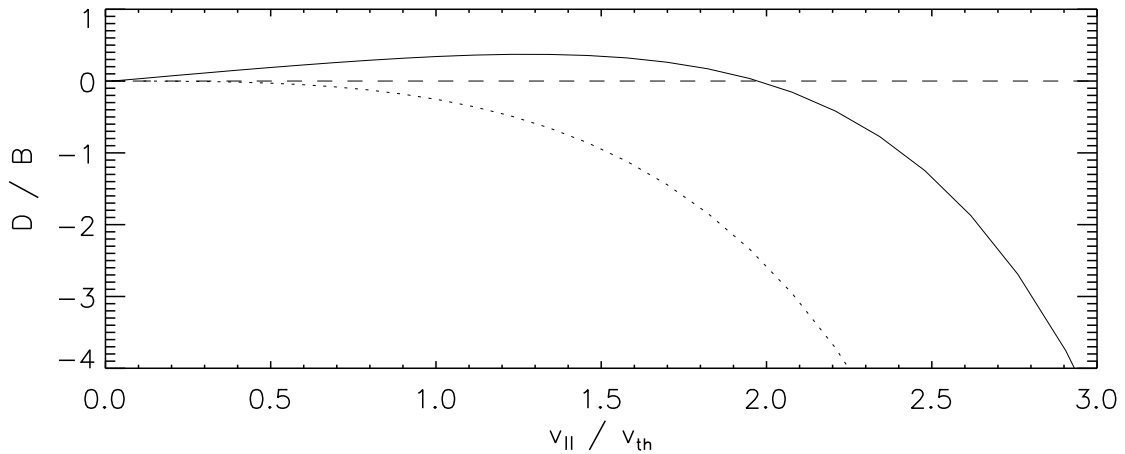


Abbildung 4.6: Vergleich von $D_{0,num}(v_\parallel)$ (durchgezogene Linie) und $D_0(v_\parallel)$ (gestrichelte Linie). Die D sind auf den Parameter B nach (4.15) normiert.

Die Abbildung 4.6 zeigt die Störungskoeffizienten $D_{0,num}$ der numerischen Rechnung und das theoretische D_0 nach (4.27). Die Übereinstimmung ist sehr schlecht. $D_{0,num}$ und D_0 liegen zwar in derselben Größenordnung und stimmen in der Randbedingung $D(x=0) = 0$ überein, aber selbst der qualitative Verlauf der Kurven ist unterschiedlich. Das numerisch bestimmte $D_{0,num}$ nimmt zunächst zu, erreicht ein Maximum bei ungefähr $v_\parallel = 1.3 v_{th}$ und fällt dann ab, wobei es für $v_\parallel > 2 v_{th}$ negativ wird. D_0 dagegen fällt streng monoton ab und strebt rascher großen negativen Werten zu.

Überraschenderweise ist das numerische Ergebnis physikalisch sinnvoller als die analytische Lösung. Durch den streng monotonen Verlauf von $D_0(v_\parallel)$ und den durch den Faktor $\cos \theta$ in (4.8) bedingten Vorzeichenwechsel an der Stelle $v_\parallel = 0$ ergibt sich für die analytische Lösung eine von Null verschiedene Driftgeschwindigkeit, im Widerspruch zu der Wahl von α in (4.23). Dagegen weist $D_{0,num}$ den schon diskutierten Vorzeichenwechsel auf und zeigt damit einen zumindest qualitativ korrekten Verlauf.

Die Ursache für die Probleme mit der analytischen Lösung liegt in der Näherung (4.8) nach Spitzer und Härm (1953) für die Störung $f^1(\vec{v})$. Es wird vorausgesetzt, daß der Parameter $D(x)$ nur vom Betrag von \vec{v} abhängt und daß sich die Abhängigkeit von der Richtung von \vec{v} auf einen Faktor $\cos \theta$ beschränkt. Dies entspricht einer Kugelfunktionsentwicklung nur bis zur ersten Ordnung. Da die Berechnung von $D_0(v_{\parallel})$ nach (4.27) eine Integration über alle $D(x)$, $x \in [\frac{|v_{\parallel}|}{\sqrt{2}v_{th}}, \infty]$ und damit über alle $\theta \in [0, \pi/2]$ beinhaltet, können die bei dieser Reihenentwicklung entstehenden Abbruchfehler einen erheblichen Einfluß auf das Ergebnis haben. Das führt zu dem unphysikalischen Verhalten von $D_0(v_{\parallel})$ in der Abbildung 4.6.

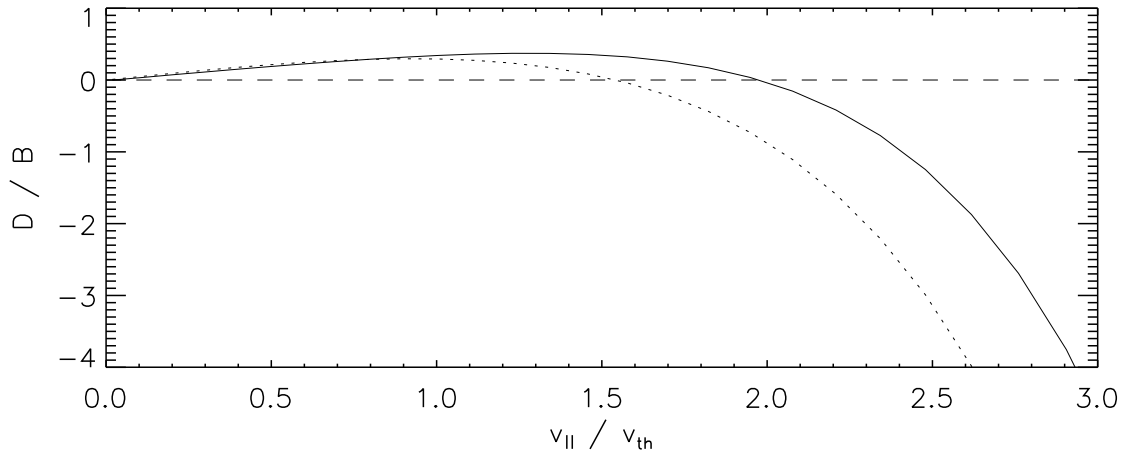


Abbildung 4.7: Vergleich von $D_{0,num}(v_{\parallel})$ (durchgezogene Linie) und $D(x = v_{\parallel}/(\sqrt{2} v_{th}))$ (gestrichelte Linie). Die D sind auf den Parameter B nach (4.15) normiert.

Da die schlechte Übereinstimmung der Kurven in Abbildung 4.6 auf die Integration über alle v_{\perp} in (4.27) zurückzuführen ist, lohnt es sich, einfach auf diese Integration und damit auf die Definition der reduzierten Verteilungen zu verzichten und $D_{0,num}$ direkt mit $D(x = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2}v_{th}})$ zu vergleichen. Nach dem Störungsansatz (4.8) entspricht dies $\cos \theta = 1$, also $\vec{v} = v_{\parallel} \cdot \vec{e}_{v_{\parallel}}$. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

Der Vergleich zwischen $D(x = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2}v_{th}})$ und $D_{0,num}(v_{\parallel})$ zeigt eine wesentlich bessere Übereinstimmung. Der qualitative Verlauf der beiden Kurven ist gleich, beide wachsen zunächst an, durchlaufen ein Maximum und werden schließlich negativ. Für kleine v_{\parallel}/v_{th} sind sie sogar quantitativ sehr ähnlich. Die analytische Lösung $D(x = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2}v_{th}})$ erreicht ihr Maximum lediglich etwas früher und fällt dann rascher ab als $D_{0,num}(v_{\parallel})$.

Die sehr gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kurven kann darauf zurückgeführt werden, daß $D(x = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2}v_{th}})$ die rein parallele Teilchenbewegung beschreibt, während $F_0(v_{\parallel})$ aufgrund seiner Definition (2.2) als einfaches Integral von $f(\vec{v})$ über die senkrechte Geschwindigkeitskoordinate ebenfalls eng mit der parallelen Bewegung verknüpft ist. Die Abweichungen können den unterschiedlichen Definitionen der beiden D sowie der Näherung (4.8) zugeschrieben werden.

Diese Ergebnisse zeigen, daß es eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den analytischen und numerischen Ergebnissen für die Verteilungsfunktionen in einem Plasma mit einem Temperaturgradienten gibt. Die beim analytischen Modell gemachten Näherungen verhindern einen

genauen Vergleich, aber die in der Abbildung 4.7 erkennbare sehr gute Entsprechung zwischen numerischen und analytischen Störungsparametern zeigt, daß das kinetische Modell physikalisch richtige und auch quantitativ korrekte Ergebnisse für die reduzierten Verteilungen liefert.

Kapitel 5

Ergebnisse des kinetischen Modells

Nach der Entwicklung des kinetischen Modells und den erfolgreichen Tests des numerischen Verfahrens in den vorhergehenden Kapiteln ist es nun möglich, Simulationsrechnungen für das koronale Plasma durchzuführen und Einblicke in die dort ablaufenden physikalischen Prozesse zu gewinnen.

Zuerst werden die Geometrie des betrachteten koronalen Trichters sowie die als Anfangs- und Randbedingungen verwendeten Ergebnisse eines einfachen Flüssigkeitsmodells vorgestellt. Anschließend werden Modelle der unteren Korona mit einem aus Protonen und Elektronen bestehendem Plasma berechnet, wobei der Einfluß der Form des Wellenspektrums auf die Ergebnisse diskutiert wird. Dieselben Rechnungen werden mit einem aus verschiedenen Ionensorten bestehenden Plasma wiederholt. Anschließend wird versucht, das Modell in den Sonnenwind hinein fortzusetzen. Schließlich werden einige Modelle, die sich von der Übergangszone über einen Sonnenradius in die Korona erstrecken, vorgestellt und der Einfluß der schweren Ionen auf das Plasma und den Heizungsprozeß diskutiert.

5.1 Geometrie des Rechenfeldes und Anfangsbedingungen

In diesem Kapitel werden kinetische Modellrechnungen für das Plasma eines “koronalen Trichters” in einem polaren koronalen Loch der Sonne vorgestellt. Es handelt sich dabei um eine sehr langlebige magnetische Struktur, so daß der auf zeitlicher Relaxation basierende Lösungsansatz für die Vlasov – Gleichung (2.32) anwendbar ist. Die Abbildung 5.1 skizziert einen typischen koronalen Trichter.

Der Ursprung des Trichters liegt in dem durch die Grenzen zwischen den Supergranulationszellen gebildeten chromosphärischen Netzwerk. Durch die konvektive Bewegung der Supergranulation im Sonneninnern wird das Magnetfeld an die Grenzen der Supergranulationszellen transportiert, so daß es dort erhöhte Werte aufweist, vgl. Gabriel (1976). In der Konvektionszone bestimmt die Plasmabewegung die Magnetfeldgeometrie, das Plasma - β ist dort größer als 1. Mit zunehmender Höhe nimmt der Gasdruck in der Sonne rasch ab, so daß β in der

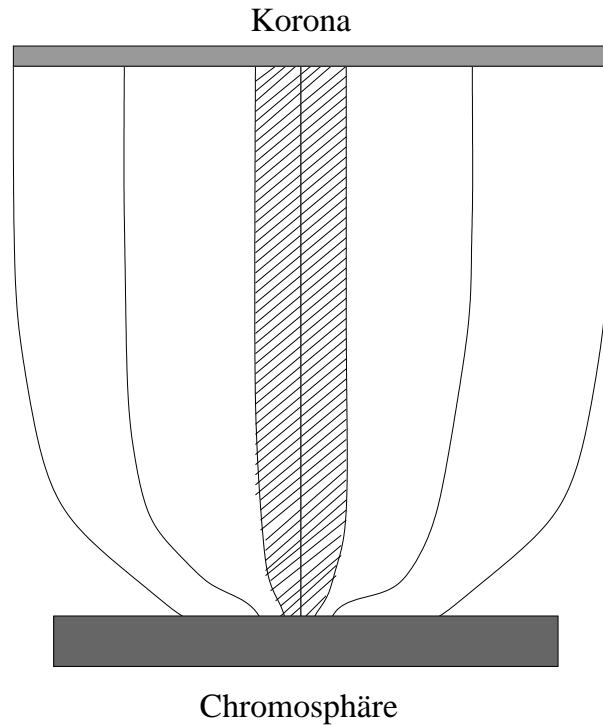


Abbildung 5.1: Die Geometrie eines “koronalen Trichters”

Chromosphäre und Korona $\ll 1$ wird. Die magnetische Struktur weitet sich stark auf, so daß der in Abbildung 5.1 dargestellte koronale Trichter entsteht.

Bei den kinetischen Rechnungen befindet sich der untere Rand des Rechengebietes in der Übergangszone und der obere Rand in der Korona der Sonne. Es wird das Plasma entlang der Zentrallinie des Trichters modelliert, so daß der Winkel ψ zwischen Magnetfeldrichtung und Richtung des Schwerfelds stets gleich Null ist. Der Bereich, auf den sich die kinetischen Modelle beziehen, ist in der Abbildung 5.1 schraffiert.

Der Durchmesser der so definierten schmalen Flußröhre um die Zentrallinie herum wird nach dem Modell von Hackenberg et al. (1999) berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Der Plot erstreckt sich über 3 Sonnenradien. Im unteren Bereich ist die rasche Aufweitung des koronalen Trichters zu erkennen, die rasch in eine Sättigung übergeht. Im oberen Bereich nimmt der Radius weiter zu, da das Magnetfeld nach Art eines Dipols wie B^{-3} abfällt und der Flußröhrenradius entsprechend zunimmt.

Die Abbildung 5.3 zeigt einen Ausschnitt aus 5.2 für die untere Korona. Die Aufweitung des koronalen Trichters ist hier deutlicher zu erkennen, und auch der Übergang in die Sättigung. Bei größeren Höhen macht sich wieder das großräumige Abklingen des Magnetfeldes bemerkbar.

Wie schon in Abschnitt 3.1.4 erläutert wurde, benötigt das kinetische Modell Anfangs- und Randbedingungen für die reduzierten Verteilungen $F_{j,k}(s, v)$, die mit Hilfe eines einfachen Fluidmodells berechnet werden. Das Flüssigkeitsmodell basiert auf einer Vereinfachung des Modells von Hu et al. (1997).

Die Abbildung 5.4 zeigt die Ergebnisse des Flüssigkeitsmodells eines Protonen - Elektronen - Plasmas für den koronalen Trichter nach Abbildung 5.2. Am unteren Rand wurden typische

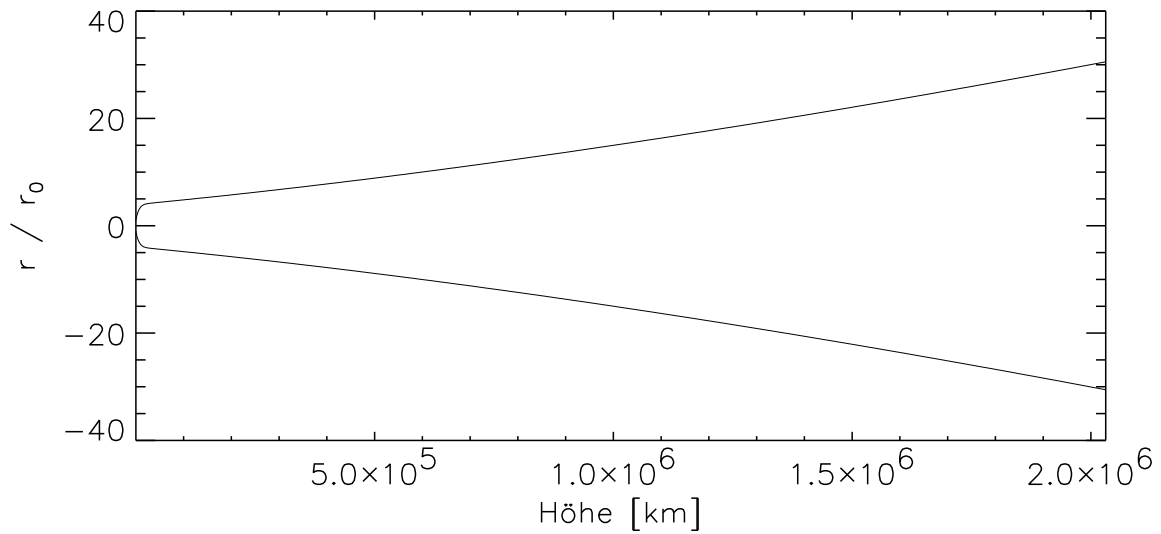


Abbildung 5.2: Flußröhrenradius als Funktion der Ortskoordinate. r_0 ist der Radius am unteren Rand

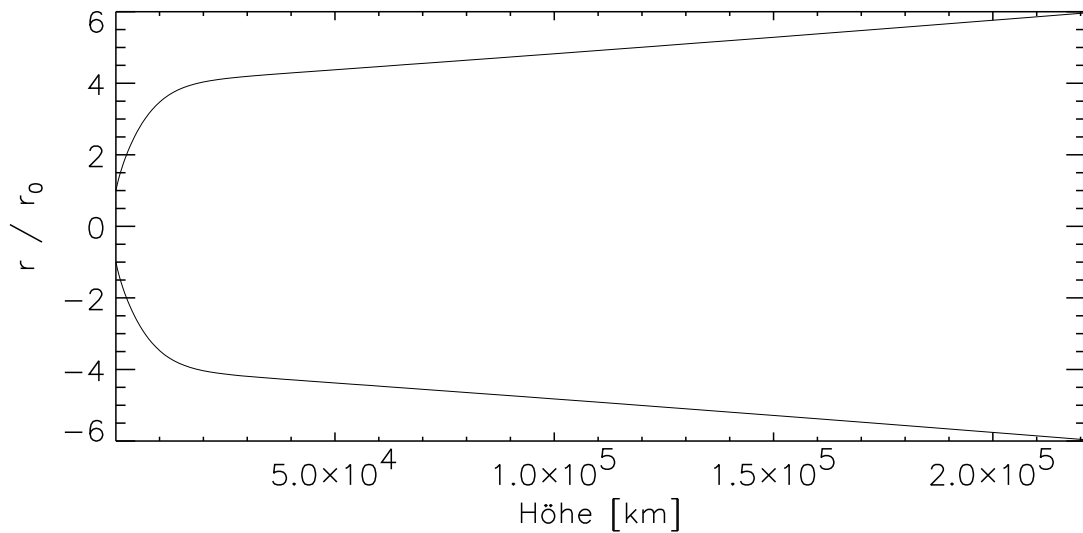


Abbildung 5.3: Flußröhrenradius als Funktion der Ortskoordinate in der unteren Korona. r_0 ist der Radius am unteren Rand

Bedingungen der Übergangszone mit $N = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ und $T = 2 \cdot 10^5 \text{ K}$ vorgegeben. Zu erkennen ist der Dichteabfall mit der Höhe sowie ein Anstieg der Driftgeschwindigkeit bis in den supersonischen Bereich. Zum Vergleich: Protonen haben bei einer Temperatur von 10^6 K eine thermische Geschwindigkeit von rund $9 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. Die Temperatur steigt mit der Höhe zunächst steil an, erreicht in der unteren Korona ein Maximum von etwa $1.6 \cdot 10^6 \text{ K}$ und fällt über 3 Sonnenradien auf etwa $1.0 \cdot 10^6 \text{ K}$ ab. Die Elektronentemperatur wurde der Protonentemperatur angepaßt.

Das Auftreten eines Temperaturmaximums in der unteren Korona ist auf zwei Effekte zurück-

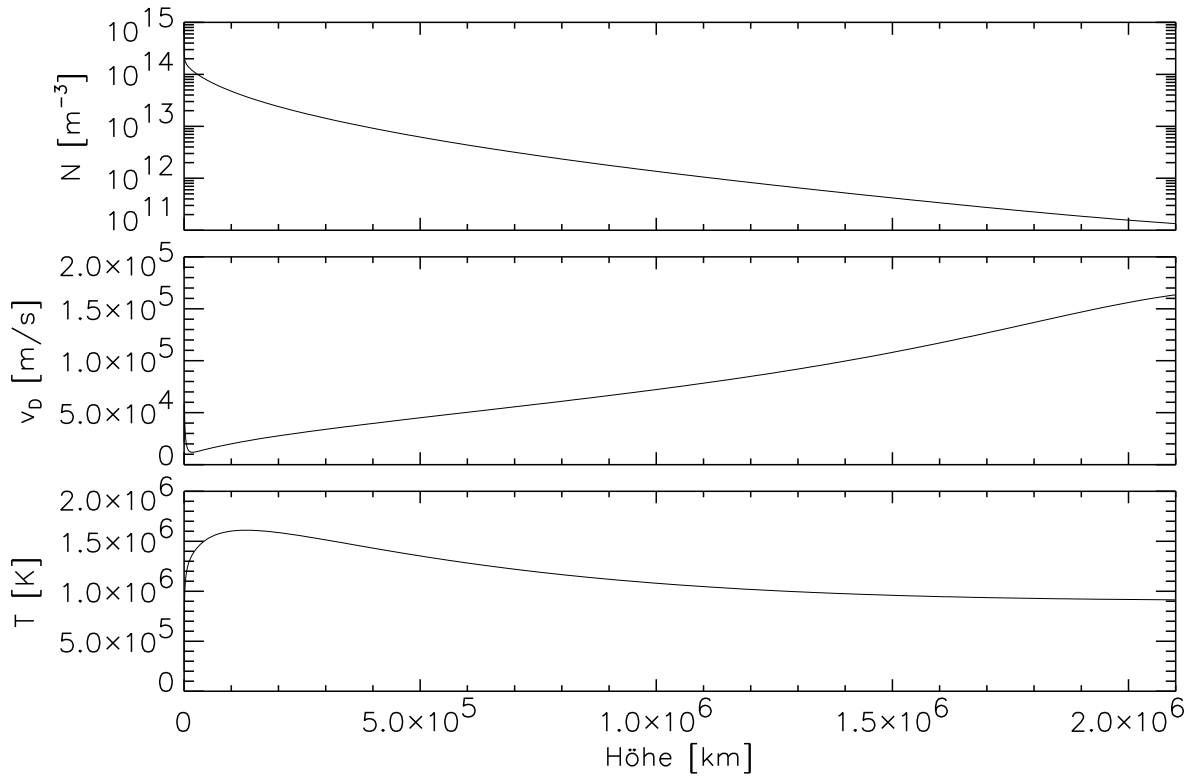


Abbildung 5.4: Anfangs- und Randbedingungen für die Momente der reduzierten Verteilungen

zuführen. Zum einen nimmt der Radius der betrachteten Flußröhre mit der Höhe um einen Faktor 30 zu, so daß die Querschnittsfläche um einen Faktor 900 wächst. Da der Energiestrom der Wellen $E_S \cdot v_A \cdot A$ beträgt, gilt unter Berücksichtigung von $A \propto 1/B$:

$$\frac{E_S}{E_{S,0}} = \sqrt{\frac{N}{N_0}} \quad (5.1)$$

Der Index $_0$ kennzeichnet dabei Größen am unteren Rand des Rechenfeldes. Da die Dichte von $N = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ auf 10^{11} m^{-3} abnimmt, sinkt die Energiedichte der Wellen innerhalb des Rechenfeldes um einen Faktor 10^{-2} ab. Dementsprechend sinkt auch die Heizrate.

Der andere Effekt zur Ausbildung eines Temperaturmaximums ist der Ansatz eines starren Potenzspektrums für die Wellenenergie. Durch die Welle - Teilchen - Wechselwirkung wird dem gesamten Spektrum Energie entzogen, so daß E_S mit der Höhe noch stärker als durch die Geometrie bedingt abfällt.

Insgesamt erscheint das Temperaturprofil mit seinem scharfen Anstieg in der Übergangszone, dem Maximum in der unteren Korona und Werten von 10^6 K beim Übergang in den Sonnenwind physikalisch sinnvoll.

Die Abbildung 5.5 stellt einen Ausschnitt aus Abbildung 5.4 für die untere Korona dar. Bemerkenswert ist das scharfe lokale Maximum der Geschwindigkeit in der Nähe des unteren Randes des Rechenfeldes. Es ist darauf zurückzuführen, daß der starke Temperaturanstieg in der Übergangszone bei einem barometrischen Druckverlauf mit einem ebenso starken Dichteabfall verbunden ist. Da der Teilchenfluß $\phi = N v_D A$ im gesamten Rechenfeld konstant ist, führt

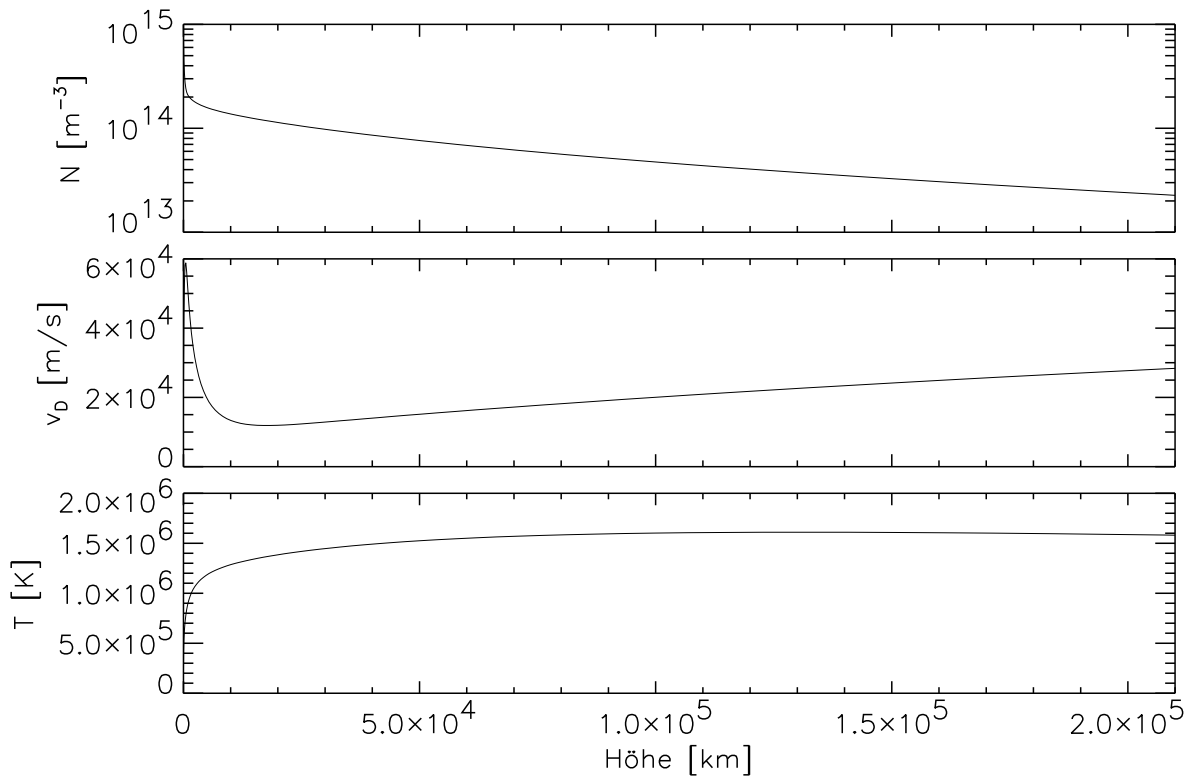


Abbildung 5.5: Anfangs- und Randbedingungen für die Momente der reduzierten Verteilungen in der unteren Korona

der Dichteabfall zu einem scharfen Anstieg der Driftgeschwindigkeit. Schon in relativ geringer Höhe im Rechenfeld hat die Temperatur koronale Werte erreicht, so daß sich die Dichte nur noch dem barometrischen Druckabfall entsprechend langsam verringert. Dadurch verlangsamt sich die Zunahme von v_D deutlich.

Da sich in der betreffenden Höhe der koronale Trichter nach Abbildung 5.3 sehr stark aufweitet, nimmt der Flußröhrenquerschnitt A erheblich zu, so daß v_D ein Maximum durchläuft und stark abfällt. Erst in einer Höhe, in der der Flußröhrenquerschnitt nur noch langsam wächst, verlangsamt sich die Abnahme von v_D . Aufgrund des Dichteabfalls mit der Höhe erreicht v_D ein Minimum und nimmt im Rest des Rechenfeldes mit der Höhe bis zu supersonischen Geschwindigkeiten zu.

5.2 Modellrechnungen für die untere Korona

Nach der Vorgabe der Flußröhrengometrie und des Rechenfeldes ist es nun möglich, Simulationsrechnungen mit dem kinetischen Modell durchzuführen. Zunächst werden Modelle für die untere Korona bis zu $0.3R_\odot$ berechnet.

In Abschnitt 2.3.3 wurden die möglichen Ansätze eines starren und eines variablen Spektrums für die Wellenenergie beschrieben, wobei festgestellt wurde, daß der Ansatz eines starren Spektrums zur Absorption der Wellenenergie auf wenigen Ionenträgheitslängen und damit auf ei-

nigen Metern in der Korona der Sonne führt, so daß es notwendig ist, die Welle - Teilchen - Wechselwirkung mit einem willkürlichen Vorfaktor $\chi \ll 1$ zu verringern. Um den Unterschied zwischen diesem Ansatz und dem eines variablen Spektrums auf die kinetischen Ergebnisse zu untersuchen, werden Modelle der unteren Korona mit beiden Ansätzen berechnet und verglichen.

5.2.1 Simulationen für ein Protonenplasma

Ergebnisse für ein starres Wellenspektrum

Zuerst wird ein Plasma mit Protonen als einziger Ionensorte betrachtet. Bei der Simulationsrechnung mit einem starren Spektrum wird am unteren Rand eine Energiedichte von $8 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}^3$ vorgegeben. Der Wert wurde so gewählt, daß das koronale Plasma eine Aufheizung auf eine Temperatur der Größenordnung 10^6 K aufweist. Da die sich einstellende Temperatur empfindlich auf den Wärmestrom in die kühlere Chromosphäre reagiert, besteht eine starke Abhängigkeit zu der am unteren Rand vorgegebenen Temperatur, die aufgrund der Anfangs- und Randbedingungen nach Abbildung 5.4 stets $2 \cdot 10^5 \text{ K}$ beträgt. Daher kann die in der Simulation verwendete Wellenenergiedichte von den tatsächlich in der Sonnenkorona auftretenden Werten abweichen. Bei der Diskussion der raschen Absorption der Wellenenergie nach Gleichung (2.79) in Abschnitt 2.3.3 wurde ein Zahlenwert $\chi = 10^{-6}$ für den Vorfaktor vor der Welle - Teilchen - Wechselwirkung vorgeschlagen, um die Absorptionslänge der Wellen von 1 m auf 1000 km zu vergrößern. Für das hier vorliegende Potenzspektrum mit Spektralkoeffizient $\alpha = 1.5$ wird ein noch etwas kleineres $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$ gewählt.

Die Abbildung 5.6 stellt die Höhenprofile der Teilchendichte N , der Driftgeschwindigkeit v_D , des Teilchenflusses ϕ , des Drucks p , der Temperatur T sowie des Energieflusses ϕ_E nach einer Simulationszeit von $t = 2 \cdot 10^4 \text{ s}$ dar. Die Transitzeit eines Teilchens auf einer ballistischen Flugbahn durch das Rechenfeld beträgt nach (4.6) rund 1700 s, so daß $t = 11.7 T_t$ groß gegenüber der Transitzeit ist. Folglich hatte das numerische System genug Zeit, sich vom Anfangszustand in einen stationären Endzustand zu entwickeln.

Der Teilchenfluß ϕ weist im gesamten Rechenfeld einen konstanten Wert auf. Das numerische Verfahren ist in einen stationären Zustand konvergiert, und die Teilchenzahlerhaltung ist hervorragend erfüllt. Auch der Wert des Energieflusses ϕ_E nach (4.5) ist in guter Näherung konstant, lediglich im Bereich des unteren Randes des Rechenfeldes tritt eine kleine "Welle" auf. Der Fehler liegt aber nur im Bereich einiger Prozent und ist angesichts der starken Aufweitung der Flußröhrengometrie, des Temperaturgradienten, der Geschwindigkeitsänderung und der Aufheizung des Plasmas durch Welle - Teilchen - Wechselwirkung in diesem Bereich relativ gering. Daher ist auch die Energieerhaltung gut gewährleistet.

Das Höhenprofil der Dichte zeigt im gesamten Rechenfeld eine Abnahme, wobei es im Bereich des unteren Randes einen sehr starken Abfall gibt. Dieser ist auf den scharfen Temperaturgradienten dort zurückzuführen, da sich das Plasma im Druckgleichgewicht befindet. Auch das Höhenprofil des Drucks zeigt im Rechenfeld einen annähernd exponentiellen Abfall, wobei der Wert $\frac{\partial \ln p}{\partial s} = 8.3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}$ gut mit dem barometrischen Wert $1.1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}$, der sich für ein Elektronen - Protonen - Plasma mit $T_p = T_e = 1.5 \cdot 10^6 \text{ K}$ ergibt, übereinstimmt. Die kleine Abweichung kann durch die Temperaturänderung im Rechenfeld und die Differenz zwischen der

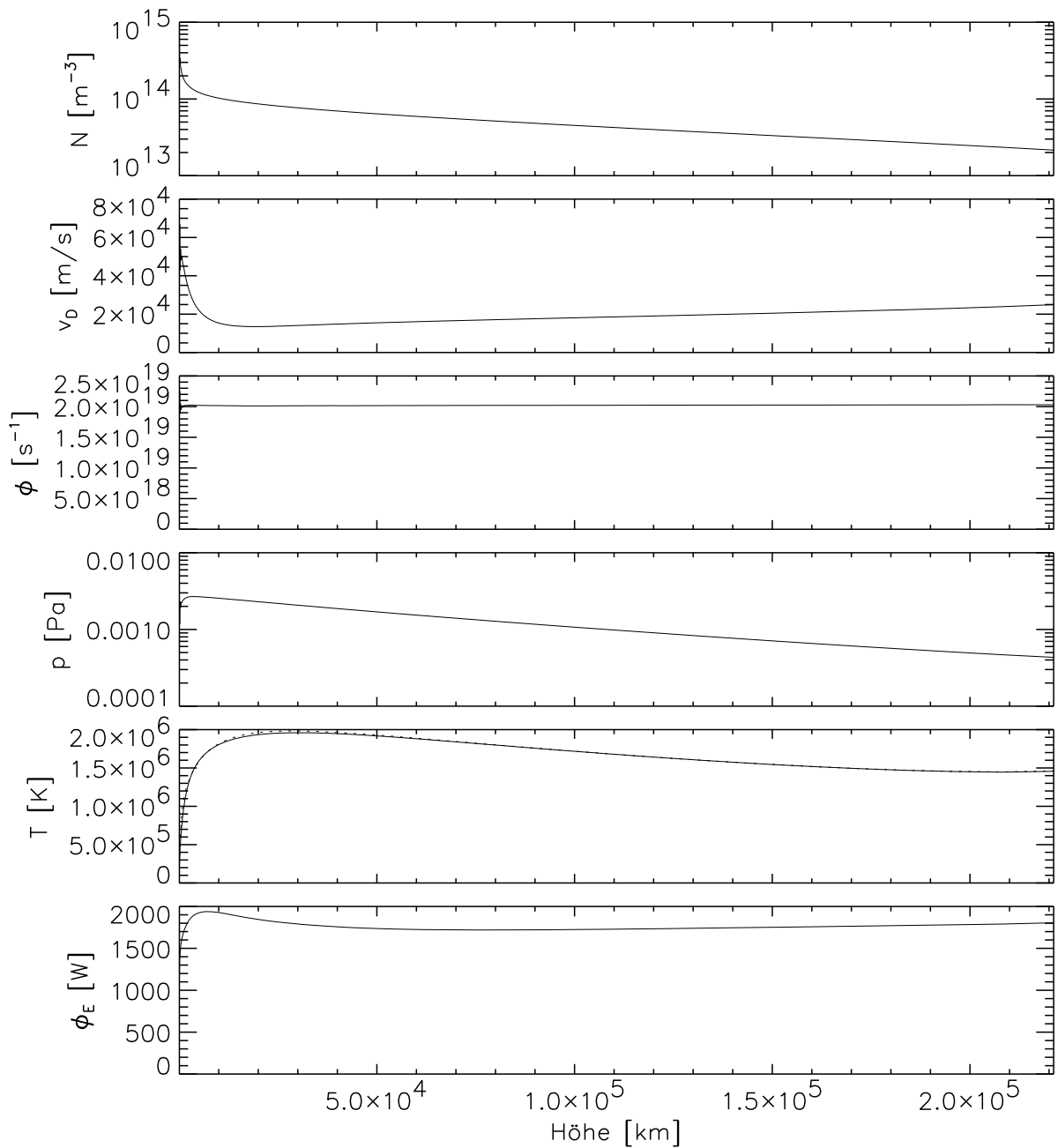


Abbildung 5.6: Höhenprofile für ein Protonenplasma unter Annahme eines starren Wellenspektrums. Das Temperaturprofil stellt die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linie) und T_{\perp} (gestrichelte Linie) dar.

Protonentemperatur und der aus der Anfangsbedingung stammenden Elektronentemperatur erklärt werden.

Im unteren Bereich des Rechenfeldes steigt der Druck zuerst geringfügig an. Es handelt sich dabei um die Höhe, in der die Welle - Teilchen - Wechselwirkung einsetzt und nicht nur Energie, sondern auch Impuls auf das Plasma übertragen wird.

Das Temperaturprofil weist am unteren Rand des Rechenfeldes den für die Übergangszone der

Sonne charakteristischen sehr scharfen Anstieg auf. Daran schließt sich bis zu einer Höhe von etwa $5 \cdot 10^4$ km ein breites Maximum an, dessen Wert mit $T = 2 \cdot 10^6$ K höher als die maximale Temperatur ($T = 1.5 \cdot 10^6$ K) der Anfangsbedingung ist. Hier zeigt sich die Heizung des Plasmas durch die Welle - Teilchen – Wechselwirkung. In größerer Höhe nimmt die Heizung ab, und das aufwärtsströmende Plasma kühlt sich adiabatisch ab. Die Temperatur durchläuft im Bereich des oberen Randes des Rechenfeldes ein schwach ausgeprägtes Minimum und steigt unmittelbar am Rand auf den durch die Randbedingung vorgegebenen Wert von knapp $1.5 \cdot 10^6$ K an.

Bei dem Ansatz eines starren Wellenspektrums hängt die Ausdehnung des Bereichs, in dem die Heizung aktiv ist, von der Absorption der Wellen durch das Plasma und damit von χ ab. Dadurch ist die Breite des Temperaturmaximums mit einer gewissen Willkür behaftet.

In der Umgebung des Temperaturmaximums, in der die Heizung durch Welle - Teilchen – Wechselwirkung stattfindet, ist eine schwache Temperaturanisotropie zu erkennen, T_\perp ist gegenüber T_\parallel leicht erhöht. Mit zunehmender Höhe klingt die Anisotropie wieder ab.

Das kinetische Modell liefert Werte $F_k(s, v)$ für die reduzierten Verteilungsfunktionen. Die Abbildung 5.6 stellt jedoch nur die Momente dieser Verteilungen und damit einen kleinen Teil der gewonnenen Information dar. Der Grund für die Verwendung eines kinetischen Modells war aber gerade die Möglichkeit, die Verteilung der Teilchen $F_k(v)$ im Geschwindigkeitsraum zu bestimmen. Daher werden die reduzierten Verteilungen für ausgewählte Höhen näher betrachtet.

Die Abbildung 5.7 zeigt die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_0(v)$ und $F_1(v)$ in einer Höhe von rund 9000 km. Ein Vergleich mit dem Höhenprofil der Temperatur in Abbildung 5.6 zeigt, daß sich diese Höhe am oberen Rand des scharfen Temperaturgradienten der Übergangszone befindet. Um die F_k besser mit einer Maxwellverteilung vergleichen zu können, sind zusätzlich isotrope Maxwellverteilungen mit gleicher Dichte N , Driftgeschwindigkeit v_D und paralleler Temperatur T_\parallel als gestrichelte Linien eingezeichnet.

Besonders bei höheren Geschwindigkeiten sind Abweichungen von der Maxwellverteilung festzustellen. Die Zahl der Teilchen, die sich mit hoher Geschwindigkeit nach oben ($v > 0$) bewegen, ist vermindert, während eine erhöhte Anzahl von Teilchen mit großem $|v|$ von oben nach unten strömt. Es kommt zu einem Energietransport von oben nach unten, es handelt sich hierbei um die typische Signatur eines durch den starken Temperaturgradienten bedingten abwärts gerichteten Wärmestroms.

Besonders gut ist die Wärmeleitung an $F_1(v)$ zu erkennen, da der Wärmestrom (2.12) ein erstes Moment von F_1 ist. $F_1(v)$ ist für alle $v > 0$ erniedrigt und für alle $v < 0$ erhöht. Demgegenüber ist q ein drittes Moment von $F_0(v)$. Dieselbe einfache Beziehung zwischen Erniedrigung bzw. Erhöhung von F_0 und dem Vorzeichen von v führt zu einer Driftgeschwindigkeit. Damit es im Plasmaruhsystem einen abwärts gerichteten Wärmestroms $q < 0$, aber keine Drift gibt, muß $F_0(v)$ zwar für große $v > 0$ erniedrigt und für betragsmäßig große $v < 0$ erhöht sein, aber für kleine $v > 0$ muß $F_0(v)$ gegenüber einer Maxwellverteilung erhöht und für betragsmäßig kleine $v < 0$ erniedrigt sein. Der Plot von $F_0(v)$ zeigt genau dieses Verhalten.

Neben den Werten für F_0 und F_1 zeigt die Abbildung 5.7 auch das Verhältnis von F_1 zu F_0 , normiert mit einem Faktor $(2V_\parallel^2)^{-1}$. Für eine Bi-Maxwellverteilung ist diese Größe unabhängig von v und entspricht aufgrund der Definitionen (2.7) und (2.8) für die thermischen Geschwindigkeiten V_\perp und V_\parallel der Temperaturanisotropie $\frac{T_\perp}{T_\parallel}$. Für beliebige Verteilungen $F_k(v)$ kann eine

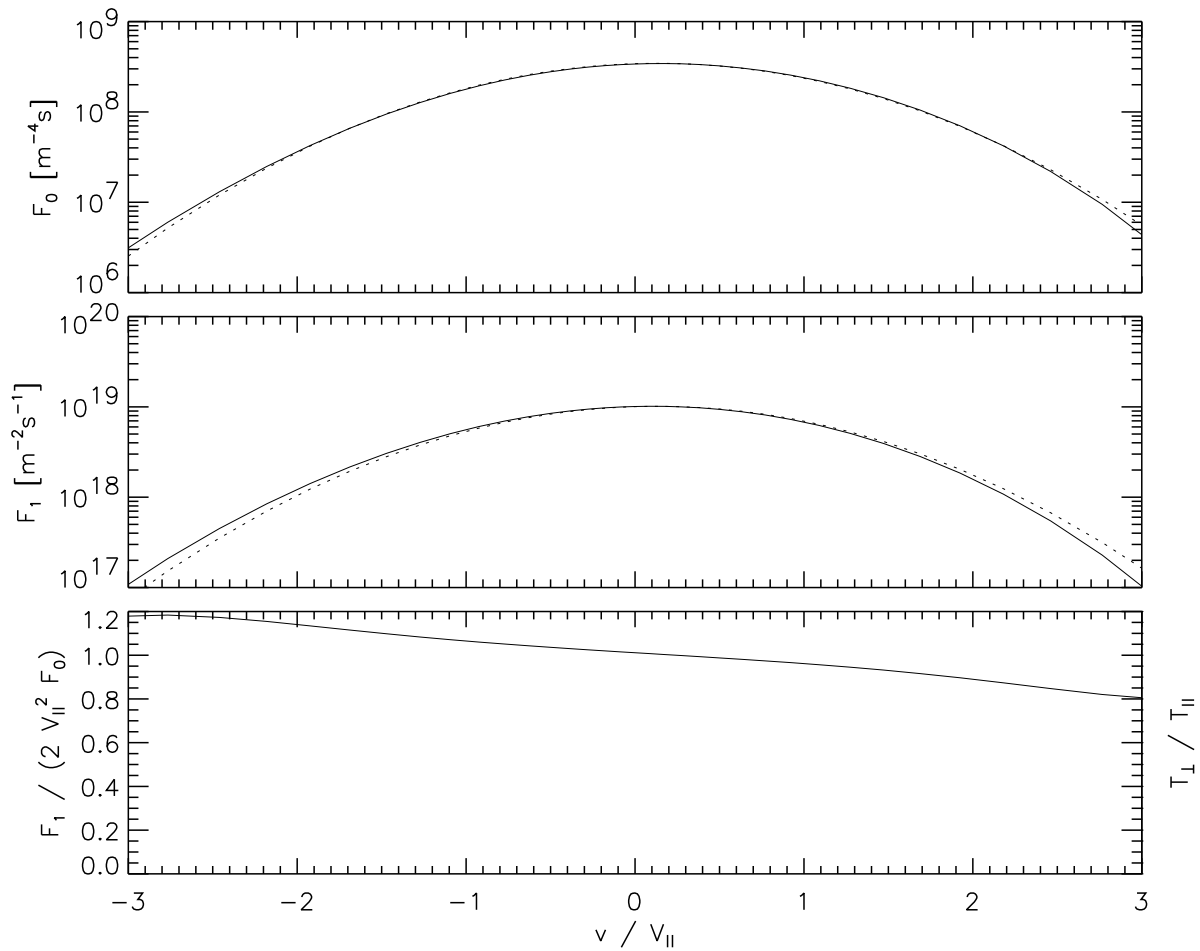


Abbildung 5.7: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 9170 km. Dargestellt sind die Werte der F_k (durchgezogene Linien) und isotrope Maxwellverteilungen mit gleichem N , v_D und $V_{||}$ (gestrichelte Linien). Das dritte Panel zeigt die Temperaturanisotropie als Funktion von v .

im Phasenraum lokale “Temperaturanisotropie” eingeführt werden:

$$\frac{T_{\perp}}{T_{||}}(v) = \frac{F_1(v)}{2V_{||}^2 F_0(v)} \quad (5.2)$$

Der Plot zeigt, daß sich die Temperaturanisotropie von einem Wert 1.2 für $v = -3V_{||}$ annähernd linear auf 0.8 bei $v = 3V_{||}$ verringert. Dies ist eine direkte Folge der durch die Wärmeleitung bedingten Schiefe der Verteilungen $F_k(v)$.

Neben der Wärmeleitung könnte auch die Spiegelkraft in der sich nach Abbildung 5.3 rasch aufweitenden Flußröhrengemetrie für Abweichungen von einer Maxwellverteilung verantwortlich sein. Sie tendiert dazu, nach oben laufende Teilchen ($v > 0$) zu fokussieren und nach unten laufende Teilchen zu spiegeln. Wenn die Einzelteilchenbewegung betrachtet wird, erfahren Ionen mit $v_{||} > 0$ eine Erhöhung von $v_{||}$ und eine Verminderung von v_{\perp} , während bei Teilchen mit $v_{||} < 0$ v_{\perp} erhöht und $v_{||}$ betragsmäßig vermindert wird. Für die reduzierten Verteilungen $F_k(v)$ führt dies zu einer Erhöhung der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{||}}(v)$ im Bereich $v < 0$ und zu einer Erniedrigung für $v > 0$.

In dem hier vorliegenden nach außen strömenden Plasma ($v_D > 0$) hat die Verminderung von T_\perp bei den Teilchen mit $v > 0$ einen größeren Effekt als die Erhöhung von T_\perp gegenüber T_\parallel bei $v < 0$. Dadurch sollte es zu einer Erniedrigung der Temperatur T_\perp gegenüber T_\parallel kommen. Dieser Effekt kann auch bei den in Abbildung 4.4 dargestellten Höhenprofilen eines ungeheizten, durch eine sich aufweitende Flußröhre strömenden Plasmas beobachtet werden, wie in Abschnitt 4.2 erläutert wurde. Das Höhenprofil der Temperatur in Abbildung 5.6 zeigt jedoch $T_\perp > T_\parallel$. Daher kann angenommen werden, daß die Abweichungen der $F_k(v)$ von einer Maxwellverteilung durch Wärmeleitung und nicht durch die Spiegelgeometrie verursacht wird.

Eine bevorzugte Erhöhung von T_\perp ist eine typische Eigenschaft der Welle - Teilchen - Wechselwirkung nach Abschnitt 2.3. In den quasilinearen Diffusionsgleichungen (2.49), (2.50) wirkt der Heizungsterm H nach (2.66) nur auf F_1 . Daran sieht man, daß die Welle - Teilchen - Wechselwirkung für die Heizung des Plasmas verantwortlich ist. Allerdings sind in den Plots der reduzierten Verteilungen $F_k(v)$ keine Eigenschaften zu erkennen, an denen sich die Wirkung des Heizungsprozesses zeigt.

Es wurde schon festgestellt, daß im unteren Bereich des Rechenfeldes ein ausgedehntes Maximum der Temperatur auftritt, und daß dies eine direkte Folge der Annahme eines starren Spektrums und des Vorfaktors $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$ vor dem Term der Welle - Teilchen - Wechselwirkung ist. Der Faktor bewirkt, daß die Absorptionslänge der Wellen von der Größenordnung der Ionenströmungslänge (wenige Meter) auf einige 10^4 km vergrößert wird. Oberhalb des Maximums ist die Wellenenergie verbraucht, und das Plasma kühlt sich bei seinem weiteren Ausströmen zunehmend adiabatisch ab.

Die Verteilungsfunktionen $F_k(v)$ in größerer Höhe weisen dementsprechende Eigenschaften auf. Die Abbildung 5.8 zeigt die reduzierten Verteilungen $F_0(v)$ und $F_1(v)$ sowie die Temperaturanisotropie als Funktion von v in einer Höhe von rund $1.6 \cdot 10^5$ km. Da die $F_k(v)$ schon in niedriger Höhe in dem Bereich, in dem das Plasma geheizt wird, keine Signaturen des Heizungsprozesses aufweisen, ist dies hier erst recht nicht der Fall.

Die reduzierten Verteilungen weichen weniger stark von einer Maxwellverteilung ab als bei $h = 9000$ km. Die vorhandenen Abweichungen weisen wieder die Eigenschaften eines Wärmestroms auf, doch jetzt ist q aufwärtsgerichtet. Dies ist mit dem aus dem Temperaturprofil in Abbildung 5.6 hervorgehenden Abfall von T mit der Höhe konsistent. Die größere Ähnlichkeit der $F_k(v)$ mit einer Maxwellverteilung ist auf den deutlich schwächeren Temperaturgradienten als im Bereich der Übergangszone zurückzuführen.

Insgesamt zeigt die Rechnung mit dem Ansatz eines starren Spektrums, daß das kinetische Modell sehr gute Ergebnisse für die reduzierten Verteilungen $F_k(s, v)$ liefert. Die Verteilungsfunktionen sind hervorragend dazu geeignet, detaillierte Rückschlüsse auf den physikalischen Zustand des Plasmas zu ziehen.

Die Annahme eines starren Spektrums stellt sich jedoch als sehr problematisch heraus. Schon beim Temperaturprofil führt es zu einem Maximum, dessen Position und Breite durch die Wahl des Dämpfungsfaktors χ willkürlich ist. In größerer Höhe ist kaum noch Wellenenergie übrig, so daß die Welle - Teilchen - Wechselwirkung in höheren Schichten der Korona keine Rolle mehr spielt.

Dieses Szenario ist jedoch unrealistisch. Jeder Frequenz ω kann nach der Resonanzbedingung $\omega(1 - v/v_{ph}) \pm \Omega = 0$ eine Resonanzgeschwindigkeit v zugeordnet werden. Doch eine Wechsel-

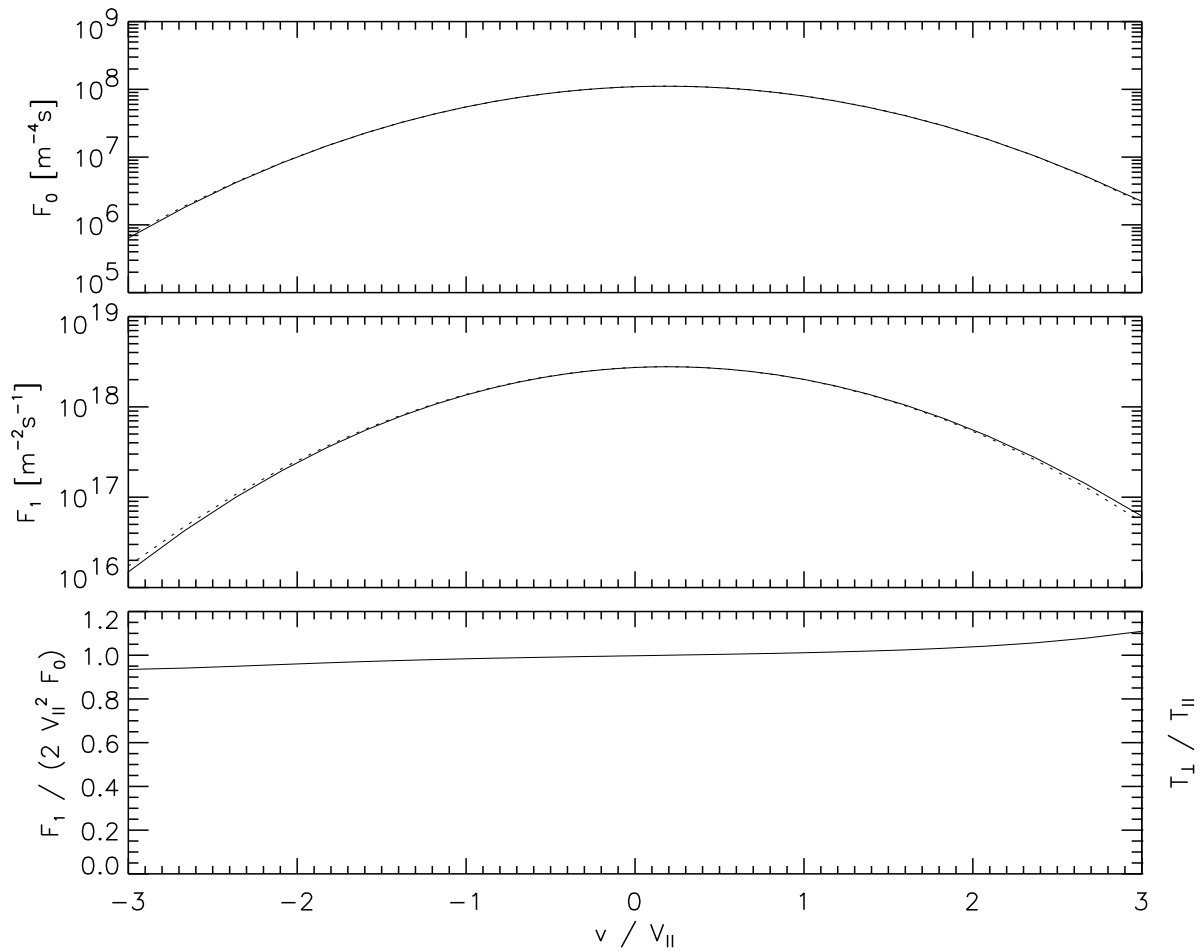


Abbildung 5.8: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 160 960 km. Dargestellt sind die Werte der F_k (durchgezogene Linien) und isotrope Maxwellverteilungen mit gleichem N , v_D und $V_{||}$ (gestrichelte Linien). Das dritte Panel zeigt die Temperaturanisotropie als Funktion von v .

wirkung zwischen Wellen und Teilchen findet nur für solche v statt, für die nach den $F_k(v)$ eine nennenswerte Zahl von Teilchen vorhanden ist. Dadurch kann nicht das ganze Spektrum auf einmal mit den Teilchen in Wechselwirkung treten und absorbiert werden. Da sich die Gyrofrequenz mit der Höhe wegen der Abnahme des Magnetfeldes verringert, verschiebt sich auch der Resonanzbereich im Spektrum, so daß auf jeder Höhe noch Wellenenergie vorgefunden werden kann.

Ergebnisse für ein variables Wellenspektrum

Aufgrund der physikalischen Probleme mit dem Ansatz eines starren Wellenspektrums, und um die Unterschiede zu einem variablen Spektrum zu verdeutlichen, wird die Simulation mit einem veränderlichen Spektrum wiederholt.

Die Abbildung 5.9 stellt die Höhenprofile der Momente der reduzierten Verteilungen nach einer Simulationszeit von $t = 2 \cdot 10^4 \text{ s} = 11.7 T_t$ dar. Genau wie bei der Abbildung 5.6 (Höhenprofile

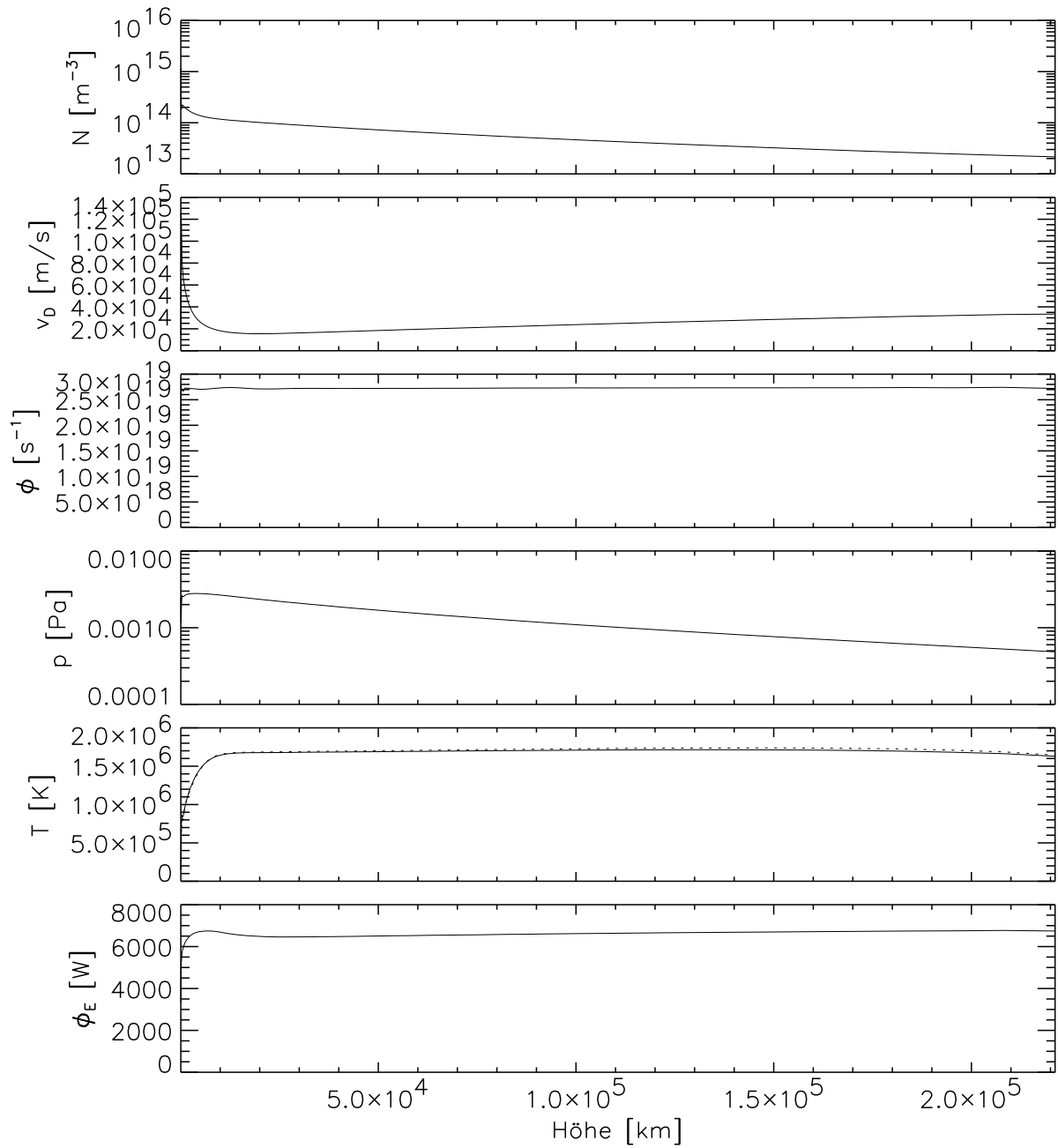


Abbildung 5.9: Höhenprofile für ein Protonenplasma unter Annahme eines variablen Wellenspektrums. Das Temperaturprofil stellt die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linie) und T_{\perp} (gestrichelte Linie) dar.

mit einem starren Spektrum) weisen der Teilchenfluß ϕ und der Energiefluß ϕ_E im gesamten Rechenfeld konstante Werte auf. Das numerische Lösungsverfahren ist in einen stationären Zustand konvergiert, und die Teilchenzahl- und Energieerhaltung sind gewährleistet.

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Abbildungen liegt in den Temperaturprofilen. Unter Verwendung eines variablen Spektrums weist es einen deutlich flacheren Verlauf auf, die Heizung des Plasmas durch Welle - Teilchen - Wechselwirkung ist nicht wie beim starren

Spektrum nur auf den unteren Bereich des Rechenfeldes konzentriert. Dies wird auch in der Temperaturanisotropie deutlich. In der Abbildung 5.6 der Rechnung mit einem starren Spektrum tritt $T_{\perp} > T_{\parallel}$ nur im Bereich des Temperaturmaximums in der untersten Korona auf, während hier im ganzen Rechenfeld eine Anisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1$ zu erkennen ist. Schon dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß der Heizungsprozeß im ganzen Rechenfeld stattfindet.

Beim Vergleich der Höhenprofile 5.6 und 5.9 fällt auf, daß sich die Werte für den Teilchenfluß geringfügig unterscheiden. Die Ursache dafür liegt in der Änderung des Temperaturprofils, die im Druckgleichgewicht zu einer Änderung des Dichte- und damit auch Druckprofils führt. Die obere Randbedingung des Rechenfeldes gibt jedoch bei beiden Simulationen denselben Druck vor, so daß es zu Veränderungen bei der Beschleunigung des Plasmas kommen kann.

Auch die Energieflüsse ϕ_E sind nicht gleich. Die Ursache hierfür liegt in den unterschiedlichen Ansätzen zur Behandlung des Spektrums. Bei der Rechnung mit einem starrem Spektrum wurde die gesamte in das Rechenfeld einströmende Wellenenergie absorbiert, während hier nur der Teil des Spektrums mit den Teilchen in Wechselwirkung tritt, der innerhalb des Wertebereichs der Protonengyrofrequenz im Innern des Rechenfeldes liegt. Der Rest des Spektrums passiert das Rechenfeld und tritt am oberen Rand wieder aus. Da die Heizraten bei beiden Simulationen ähnlich sind, sind es auch die absorbierten Energiemengen, jedoch trägt hier auch der nicht mit den Ionen wechselwirkende Teil des Spektrums zum Energiefluß bei und erhöht seinen Wert.

Auch für die Rechnung mit variablem Spektrum werden die Verteilungsfunktionen für zwei Höhen im Rechenfeld geplottet. Die Abbildung 5.10 zeigt die reduzierten Verteilungen $F_k(v)$ im unteren Bereich bei etwa 9000 km. Der qualitative Verlauf ist derselbe wie bei der Rechnung mit starrem Spektrum nach Abbildung 5.7. Die F_k werden durch die Wärmeleitung im scharfen Temperaturgradienten der Übergangzone geformt. Es gibt nur einen kleinen quantitativen Unterschied: Die Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$ weist im Bereich $v = -3V_{\parallel}$ einen etwas höheren Wert auf.

In größerer Höhe unterscheiden sich die Ergebnisse für die $F_k(v)$ der beiden Rechnungen dagegen deutlich. In der Abbildung 5.11 ist in Übereinstimmung mit dem konstanten Temperaturverlauf nach Abbildung 5.9 keine Signatur von Wärmeleitung zu erkennen. Auffällig ist eine Erhöhung der Temperaturanisotropie im Bereich negativer v , in Verbindung mit einem vergrößertem $F_1(v)$ im Bereich negativer Geschwindigkeiten. $F_0(v)$ ist davon kaum betroffen.

Hierbei handelt es sich um die Wirkung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung auf das Plasma. Zur Erläuterung soll das Spektrum der Wellen betrachtet werden.

Am unteren Rand des Rechenfeldes wird nach Abbildung 5.12 ein zeitlich konstantes Spektrum von Wellen vorgegeben, die sich in das Rechenfeld hinein ausbreiten. Es handelt sich dabei um ein Potenzspektrum mit einem Spektralkoeffizienten $\alpha = 1$.

Da die thermischen Geschwindigkeiten der Protonen in der Korona klein gegenüber der Alfvén-geschwindigkeit sind, kann die Resonanzbedingung

$$\omega(1 - v/v_{ph}) \pm \Omega_p = 0 \quad (5.3)$$

nur für linkszirkular polarisierte Wellen (Minuszeichen) erfüllt werden. Daher werden hier nur linkszirkuläre Wellen betrachtet.

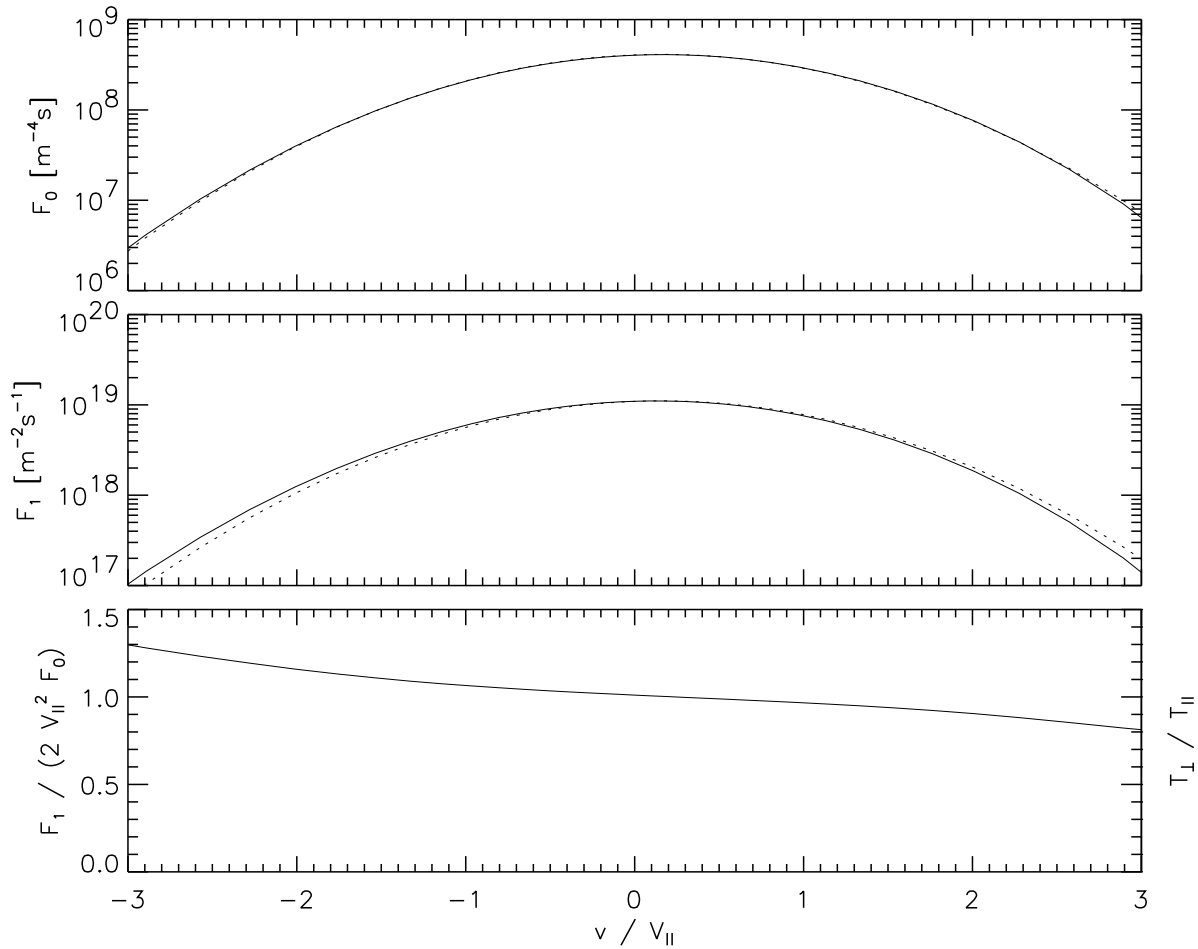


Abbildung 5.10: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 9170 km. Dargestellt sind die Werte der F_k (durchgezogene Linien) und isotrope Maxwellverteilungen mit gleichem N , v_D und $V_{||}$ (gestrichelte Linien). Das dritte Panel zeigt die Temperaturanisotropie als Funktion von v .

Die Abbildung 5.13 zeigt das Spektrum in einer Höhe von rund $1.6 \cdot 10^5$ km. Die Absorption der Wellenenergie im Bereich der Protonengyrofrequenz ist deutlich zu erkennen. Mit Hilfe der Resonanzbedingung 5.3 kann die Breite des Frequenzbereiches, in dem Absorption stattfindet, zu $\frac{v_{th}}{v_A} \cdot \Omega$ abgeschätzt werden. Da im koronalen Plasma $v_{th} \ll v_A$ gilt, ist die Absorption auf einen schmalen Frequenzbereich begrenzt, so daß sich eine relativ scharfe Absorptionslinie ausbildet.

Durch die mit zunehmender Höhe immer weiter fortschreitende Aufweitung der Flußröhre fällt das Magnetfeld und damit die Gyrofrequenz ab. Dadurch verlagert sich die Absorption zu immer niedrigeren Frequenzen. Dieses “frequency sweeping” wird in Marsch und Tu (1997) beschrieben. Der Mechanismus stellt sicher, daß der Heizungsprozeß kontinuierlich in allen Höhen abläuft, auf jeder Höhe liegt bisher unberührte Wellenenergie vor. Dadurch werden auch die Unterschiede in den Temperaturprofilen nach Abbildung 5.6 und 5.9 erklärt. Beim Ansatz eines starren Spektrums ist die Wellenenergie irgendwann aufgebraucht, und die Heizung des Plasmas kommt zum Erliegen, während hier ein kontinuierlicher Heizungsprozeß ablaufen kann, der zu einem gleichmäßigeren Temperaturprofil führt, bei dem die Wirkung der Wellen in allen Höhen zu erkennen ist.

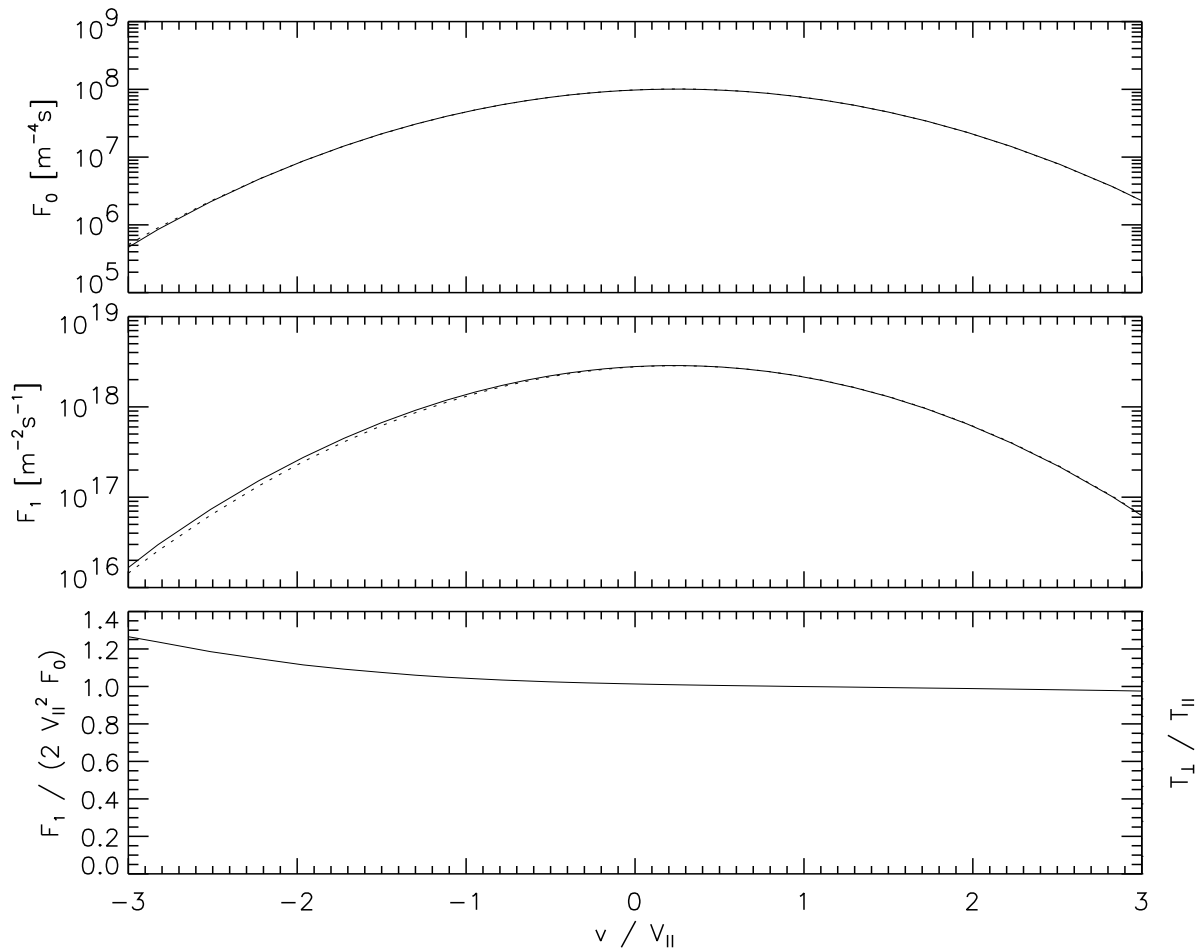


Abbildung 5.11: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen in einer Höhe von 160 960 km. Dargestellt sind die Werte der F_k (durchgezogene Linien) und isotrope Maxwellverteilungen mit gleichem N , v_D und $V_{||}$ (gestrichelte Linien). Das dritte Panel zeigt die Temperaturanisotropie als Funktion von v .

Durch Auflösen der Resonanzbedingung (5.3) für linkszirkuläre Wellen nach der Geschwindigkeit v ergibt sich:

$$v = v_{ph} \left(1 - \frac{\Omega_p}{\omega} \right)$$

Da sich die Wellen im Rechenfeld von unten nach oben ausbreiten und die Resonanzfrequenz mit der Höhe abfällt, liegt im Bereich der Gyrofrequenz Ω_p für kleinere Frequenzen $\omega < \Omega_p$ mehr Energie vor als für größere $\omega > \Omega_p$, bei denen schon in niedrigerer Höhe Absorption stattgefunden hat. Teilchen, deren Resonanzfrequenz kleiner als die Gyrofrequenz ist, haben nach obiger Formel eine negative Resonanzgeschwindigkeit $v < 0$.

Daraus folgt, daß Teilchen mit negativer Geschwindigkeit bei der Welle - Teilchen - Wechselwirkung mehr Wellenenergie vorfinden als solche mit $v > 0$. Da der Bereich resonanter Frequenzen sehr schmal ist, ist dieser Effekt zwar nur klein, aber er reicht aus, die in dem Plot von $F_1(v)$ in Abbildung 5.11 zu erkennende bevorzugte Heizung von $F_1(v < 0)$ zu bewirken.

Beim Frequenzspektrum in Abbildung 5.13 könnte erwartet werden, daß es aufgrund der Va-

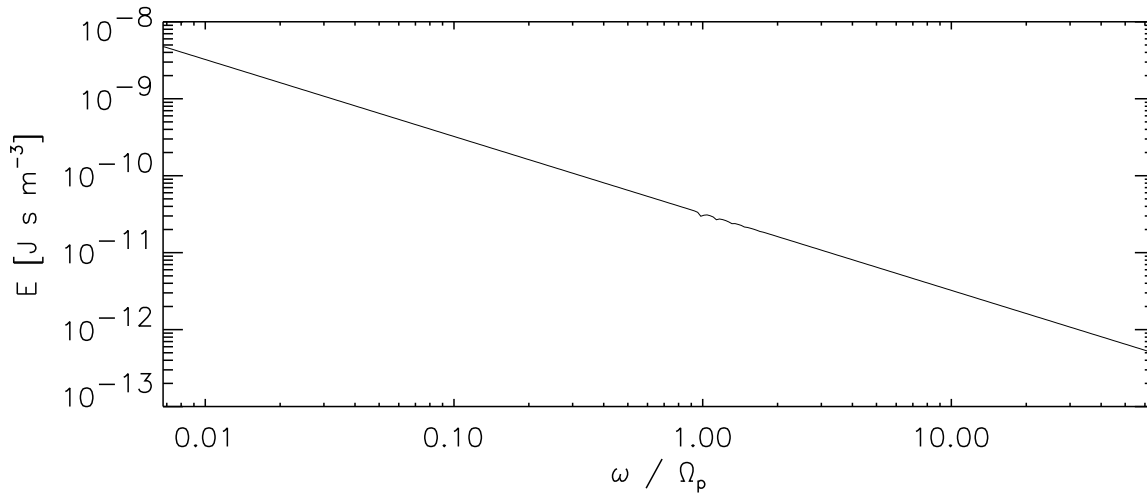


Abbildung 5.12: Das Spektrum der Plasmawellen in der Nähe des unteren Randes des Rechengefeldes, Höhe: 1126 km

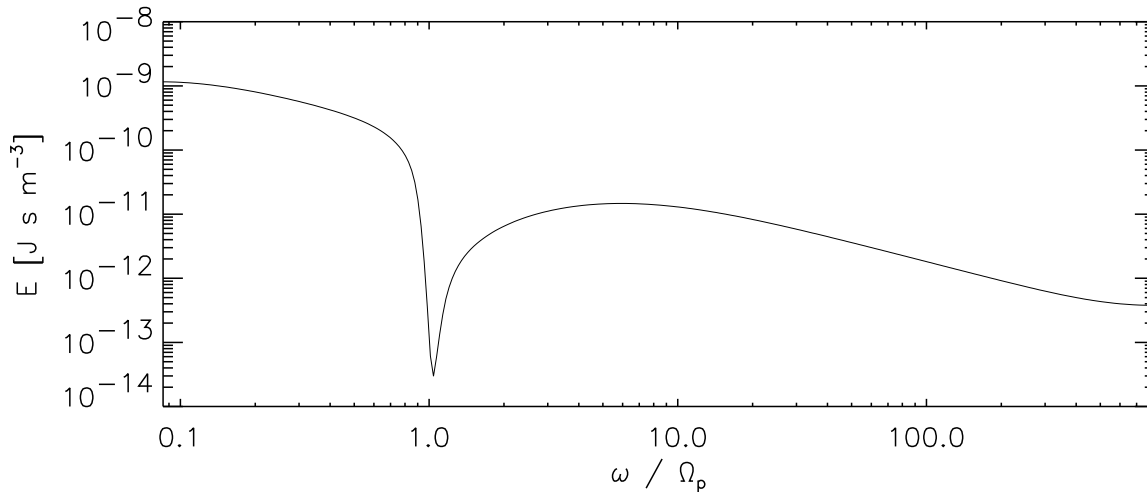


Abbildung 5.13: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 160 960 km

riation der Gyrofrequenz vom unteren Rand des Rechengefeldes bis zu der betrachteten Höhe einen breiten Frequenzbereich gibt, in dem fast keine Wellenenergie mehr vorliegt. Stattdessen wird jedoch eine relativ scharfe Absorptionslinie beobachtet. Die Ursache dafür liegt in der in Abschnitt 3.2.2 diskutierten Diffusion im Frequenzraum, die dafür sorgt, daß bei benachbarten höheren Frequenzen mehr Wellenenergie vorliegt als an der Stelle, an der die Absorption gerade stattfindet.

Insgesamt kann festgestellt werden, daß das Modell mit einem variablen Spektrum deutlich besser zur Beschreibung des koronalen Plasmas geeignet ist als das mit einem starren Spektrum. Die mit der Einführung eines willkürlichen Faktors $\chi \ll 1$ vor der Welle - Teilchen - Wechselwirkung verbundenen Probleme treten hier nicht auf. Wichtige physikalische Prozesse

wie der Einfluß der Veränderung der Gyrofrequenz mit der Höhe und die damit verbundene Höhenverteilung der Heizleistung können nur untersucht werden, wenn eine Variation der Form des Spektrums zugelassen wird.

5.2.2 Simulationen mit verschiedenen Ionen: p, He^{2+} und O^{5+}

Das Plasma der Korona enthält nicht nur Protonen und Elektronen, sondern auch zu etwa 10% He^{2+} sowie in geringen Mengen schwerere Elemente in hohen Ionisationsstufen. Da verschiedene Ionensorten unterschiedliche Gyrofrequenzen aufweisen, treten sie nicht in gleicher Weise mit den Wellen in Wechselwirkung. In der Korona werden sehr hohe Temperaturen und starke Temperaturanisotropien $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \gg 1$ schwerer Ionen, z.B. O^{5+} nach Kohl et al. (1998), beobachtet. Um die bevorzugte Heizung schwerer Ionen zu untersuchen, ist es sinnvoll, die kinetischen Rechnungen nicht nur für Protonen, sondern für ein aus mehreren Ionensorten bestehendes Plasma durchzuführen.

Die Modellierung der unteren Korona wird für ein Plasma wiederholt, das neben Protonen He^{2+} und O^{5+} als Repräsentanten schwerer Ionen enthält. Die Randbedingungen geben für He^{2+} eine Teilchenzahldichte von 10% und für O^{5+} von 0.1% der Protonendichte vor. Obwohl schon im vorhergehenden Abschnitt festgestellt wurde, daß der Ansatz eines variablen Spektrums für die Wellen wesentlich besser zur Beschreibung des koronalen Plasmas geeignet ist als der eines starren Spektrums, werden Simulationsrechnungen für beide Ansätze durchgeführt, um zu untersuchen, inwieweit auch der einfachere Ansatz eines starren Spektrums zu der in der Korona beobachteten bevorzugten Heizung der schweren Ionen führen kann.

Ergebnisse für ein starres Wellenspektrum

Zuerst wird die Simulation unter Verwendung eines starren Spektrums durchgeführt. Die Simulationszeit beträgt wie bei den vorhergehenden Rechnungen mit einem Einkomponentenplasma $t = 2 \cdot 10^4$ s, was nach Definition (4.6) der Transitzeit T_t eines Teilchens durch das Rechenfeld $11.7 T_t$ entspricht.

Die Abbildung 5.14 stellt die Höhenprofile für die Teilchenflüsse ϕ und die Temperaturen T_{\parallel} , T_{\perp} der 3 Ionensorten dar. Die übrigen Momente der reduzierten Verteilungen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit fortgelassen, qualitativ entspricht ihr Verlauf dem der Höhenprofile im vorherigen Abschnitt, und sie sind für die Diskussion der physikalischen Vorgänge im Plasma weniger bedeutend.

Die Teilchenflüsse werden geplottet, um zu überprüfen, ob die numerischen Lösungen für alle Ionensorten in einen stationären Endzustand konvergiert sind. Dies ist der Fall, der Plot zeigt konstante Teilchenflüsse für alle Ionen. Das Verhältnis der Flüsse entspricht dem Verhältnis der Teilchendichten, wie es als Randbedingung vorgegeben wurde.

Die Temperaturprofile sind dargestellt, da sie Einblicke in den Heizungsprozeß des Plasmas geben. Es stellt sich heraus, daß die parallelen und senkrechten Temperaturen der verschiedenen Ionen einen sehr ähnlichen Verlauf aufweisen. Sie entsprechen dabei qualitativ dem Temperaturprofil der Protonen in Abbildung 5.6 der Simulationsrechnung mit einer Teilchensorte und

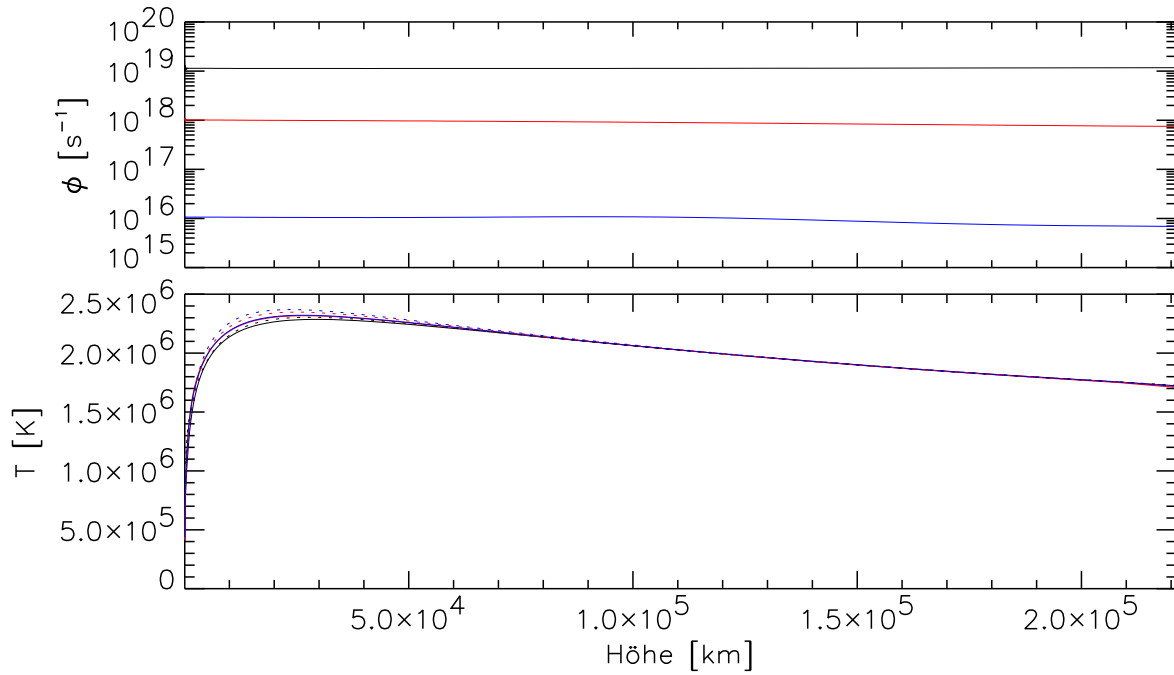


Abbildung 5.14: Höhenprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot) und O^{5+} (blau) unter Annahme eines starren Wellenspektrums. Das Temperaturprofil stellt die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien) dar.

einem starren Spektrum. Die Heizung konzentriert sich auf den unteren Bereich des Rechenfeldes, wodurch dort ein Temperaturmaximum entsteht. Im oberen Bereich läßt die Heizung nach, und das aufwärtsströmende Plasma kühlt sich adiabatisch ab.

In dem Bereich des Temperaturmaximums, wo die Heizung besonders aktiv ist, treten leichte Unterschiede zwischen den senkrechten und parallelen Temperaturen auf. Es ist festzustellen, daß T_{\perp} jeder Ionensorte höher ist als das entsprechende T_{\parallel} , und es ist T_{\perp} des Sauerstoffs höher als das des Heliums, welches wieder größer als das der Protonen ist. Eine entsprechende Reihenfolge gilt auch für T_{\parallel} .

Damit zeigt sich andeutungsweise sowohl eine bevorzugte Heizung der schweren Ionen als auch Temperaturanisotropien. Das kinetische Modell also ist in der Lage, beobachtete Eigenschaften des koronalen Plasmas zu reproduzieren. Allerdings sind diese Effekte trotz der starken Heizung im unteren Bereich des Rechenfeldes nur sehr schwach ausgeprägt.

Um die Wirkung der Wellen auf das Plasma abzuschätzen, ist es hilfreich, die “Stoßfrequenz” $\frac{1}{\tau}$ der Welle - Teilchen - Wechselwirkung nach Gleichung (2.78) mit der klassischen Coulomb - Stoßfrequenz ν nach (3.35) zu vergleichen. Da der Sauerstoff bevorzugt geheizt wird, werden die Stoßfrequenzen der O^{5+} - Ionen berechnet.

In einer Höhe von rund $2 \cdot 10^4$ km im Bereich des Temperaturmaximums beträgt die Protonendichte $N_p = 7.044 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$, die Temperatur der Protonen $T_p = 2.28 \cdot 10^6 \text{ K}$ und die des Sauerstoffs $T_O = 2.25 \cdot 10^6 \text{ K}$. Daraus ergibt sich eine Coulomb - Stoßfrequenz von $\nu = 0.336 \text{ s}^{-1}$.

Die Energiedichte der Wellen beträgt in dieser Höhe $E_S = 1.98 \cdot 10^{-5} \text{ J m}^{-3}$ und führt zu einer Stoßzeit $\frac{1}{\tau} = 2.78 \text{ s}^{-1}$ der Welle - Teilchen - Wechselwirkung.

Nach diesen Zahlenwerten wird das Plasma extrem durch die Welle - Teilchen - Wechselwirkung dominiert. Doch bei der Berechnung des $\frac{1}{\tau}$ wurde der Vorfaktor χ vor dem Term der Welle - Teilchen - Wechselwirkung in der Vlasov - Gleichung nicht berücksichtigt. Die starke Dominanz der Wellen entspricht ihrer raschen Absorption auf nur wenigen Ionenträgheitslängen. Die hier vorgestellten Simulationsergebnisse wurden jedoch mit einem Faktor $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$ gewonnen. $\frac{1}{\tau}$ ist mit diesem zu multiplizieren, so daß sich ein $\frac{1}{\tau} = 5.6 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ergibt.

Das Plasma ist daher stark stoßdominiert, die Wirkung der Wellen auf das Plasma ist gegenüber den Coulomb - Stößen sehr klein.

Mit zunehmender Höhe läßt die Heizung nach, und das Plasma nähert sich dem thermodynamischen Gleichgewicht an. Damit verschwinden sowohl die Temperaturanisotropien als auch die Unterschiede zwischen den Temperaturen der verschiedenen Ionensorten. Besser als nur am Temperaturprofil kann dies an den reduzierten Verteilungen abgelesen werden.

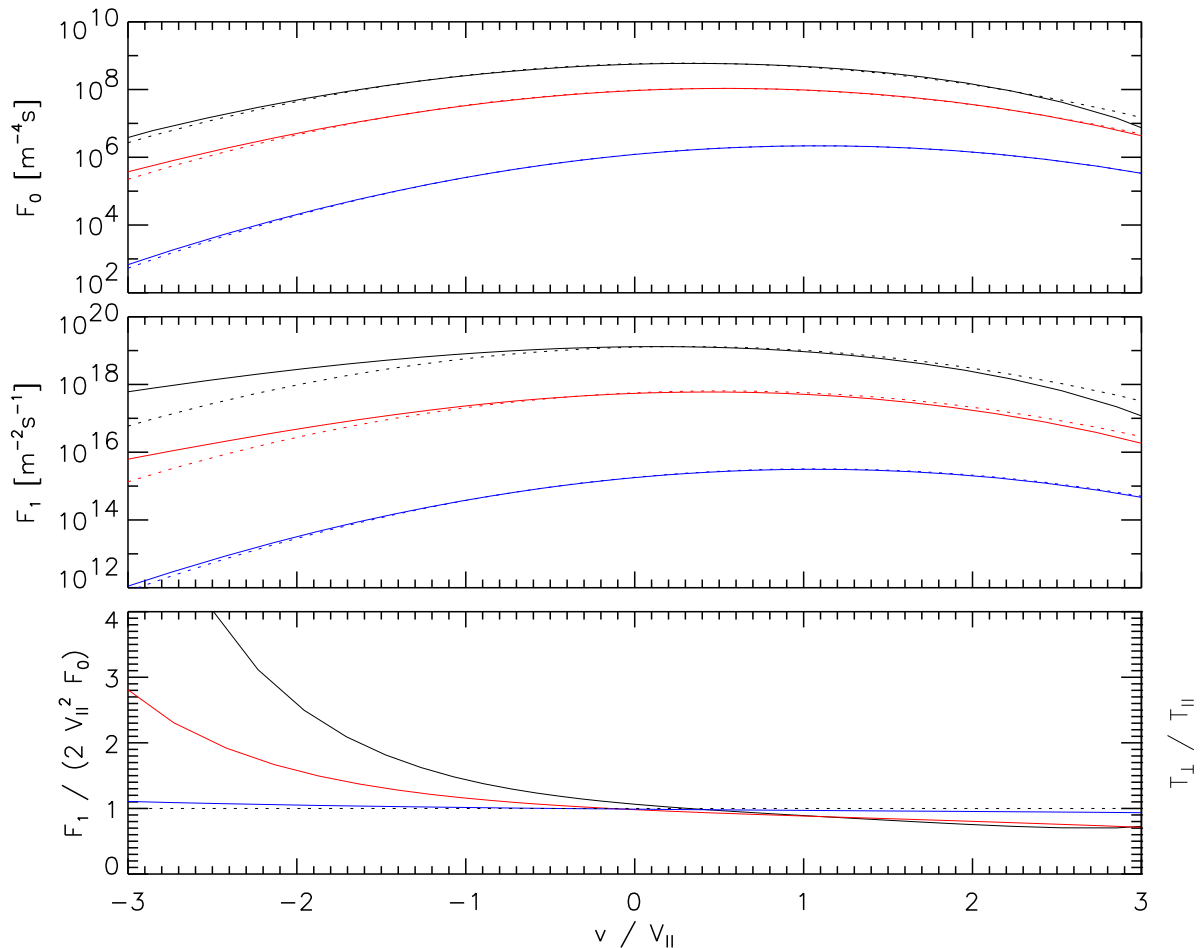


Abbildung 5.15: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen (schwarz), des He^{2+} (rot) und des O^{5+} (blau) in einer Höhe von 1126 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an.

Die $F_{j,k}(v)$ werden wie schon im letzten Abschnitt in zwei Höhen im Bereich der Übergangszone und in der Korona betrachtet. Die Abbildung 5.15 stellt die Verteilungen in einer Höhe von 1126 km dar. Dies ist eine niedrigere Position im Rechenfeld als die rund 9000 km im vorherigen

Abschnitt. Damit liegt der Plot nicht am Rand, sondern innerhalb des Temperaturgradienten der Übergangszone. Dementsprechend zeigen die $F_{j,k}(v)$ deutlichere Abweichungen von der Maxwellverteilung als die Protonenverteilung in Abbildung 5.7.

Die ersten beiden Plots zeigen die reduzierten Verteilungen $F_{j,0}(v)$ und $F_{j,1}(v)$ aller drei Ionensorten und zum Vergleich Maxwellverteilungen mit gleicher Dichte N , Driftgeschwindigkeit v_D und paralleler Temperatur T_{\parallel} . Zu beachten ist, daß die x-Achse auf die thermische Geschwindigkeit der jeweiligen Ionensorte normiert ist. Dadurch unterscheidet sich die Normierung für verschiedene Teilchensorten. In der Höhe 1126 km weisen alle Ionensorten eine Driftgeschwindigkeit von rund 29 km/s auf. In Einheiten der jeweiligen thermischen Geschwindigkeit beträgt sie für Protonen 0.26, für He^{2+} 0.53 und für O^{5+} 1.04. Dadurch erscheinen die $F_k(v)$ in der Abbildung 5.15 gegeneinander verschoben.

Alle drei Teilchensorten weisen qualitativ dasselbe Verhalten auf wie die Protonen in Abbildung 5.7, sie zeigen den nach unten gerichteten Wärmestrom der Übergangszone, es bewegen sich mehr schnelle Teilchen von oben nach unten und weniger von unten nach oben, als es für eine Maxwellverteilung zu erwarten wäre. Auch die Darstellung der Temperaturanisotropien als Funktion von v im dritten Plot gibt dieses Verhalten wieder.

Infolge der Wärmeleitung gilt auch hier für alle Ionen $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v) > 1$ für $v < 0$ und $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v) < 1$ für $v > 0$. Die Ursache für dieses Verhalten liegt in den schon bei der Diskussion der Protonenverteilungen in Abbildung 5.7 erläuterten Eigenschaften von Verteilungsfunktionen, die einen Wärmestrom $q < 0$ aufweisen. Da q ein erstes Moment von F_1 ist, ist F_1 für alle $v > 0$ erniedrigt und für alle $v < 0$ erhöht. Dagegen ist F_0 ein drittes Moment von q . Für betragsmäßig große v ist auch F_0 für $v > 0$ erniedrigt und für $v < 0$ erhöht. Doch da es hier um einen Wärmestrom und keine Drift geht, muß F_0 für betragsmäßig kleine v für $v > 0$ erhöht und für $v < 0$ erniedrigt sein. Zwischen diesen Bereichen gibt es Geschwindigkeiten, an denen F_0 mit einer äquivalenten Maxwellverteilung übereinstimmt. Der Verlauf der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ wird daher im wesentlichen von den Abweichungen von F_1 von einer Maxwellverteilung bestimmt.

Da das Plasma sehr stark stoßdominiert ist und die Stoßfrequenz der Welle - Teilchen - Wechselwirkung etwa um einen Faktor 10^{-6} kleiner ist als die der Coulomb - Stöße, sind die Wellen viel zu schwach, um einen erkennbaren Einfluß auf die Abweichungen der $F_k(v)$ von einer Maxwellverteilung zu haben. Daß die im Temperaturprofil sichtbare über alle v gemittelte Temperaturanisotropie ein wenig größer als 1 ist, kann anhand der reduzierten Verteilungsfunktionen kaum erkannt werden. Lediglich bei den Protonen deutet es sich an, da ihr $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ für $v < -1.6V_{\parallel}$ größer als 2 ist, aber für positive v niemals kleiner als 0.5 wird.

Es fällt auf, daß die Abweichung von einer Maxwellverteilung mit zunehmender Ionenmasse und -ladung abnimmt. Dies kann durch die Coulomb - Stöße erklärt werden. Die klassische Coulomb - Stoßfrequenz (3.35) nimmt mit zunehmender Ladung wie q^2 zu. Hinzu kommt, daß die schwereren Teilchen bei gleicher Temperatur niedrigere thermische Geschwindigkeiten aufweisen, und die Coulomb - Stöße mit abnehmender Relativgeschwindigkeit effektiver werden. Ein dritter Aspekt liegt darin, daß die schweren, langsamen Teilchen eine längere Zeit zur Durchquerung der Übergangszone benötigen und so den Coulomb - Stößen über einen größeren Zeitraum ausgesetzt sind.

Die Abbildung 5.16 stellt die reduzierten Verteilungen in einer Höhe von rund $1.6 \cdot 10^5$ km dar. Das Höhenprofil der Temperatur in Abbildung 5.14 zeigt in dieser Höhe einen langsamen

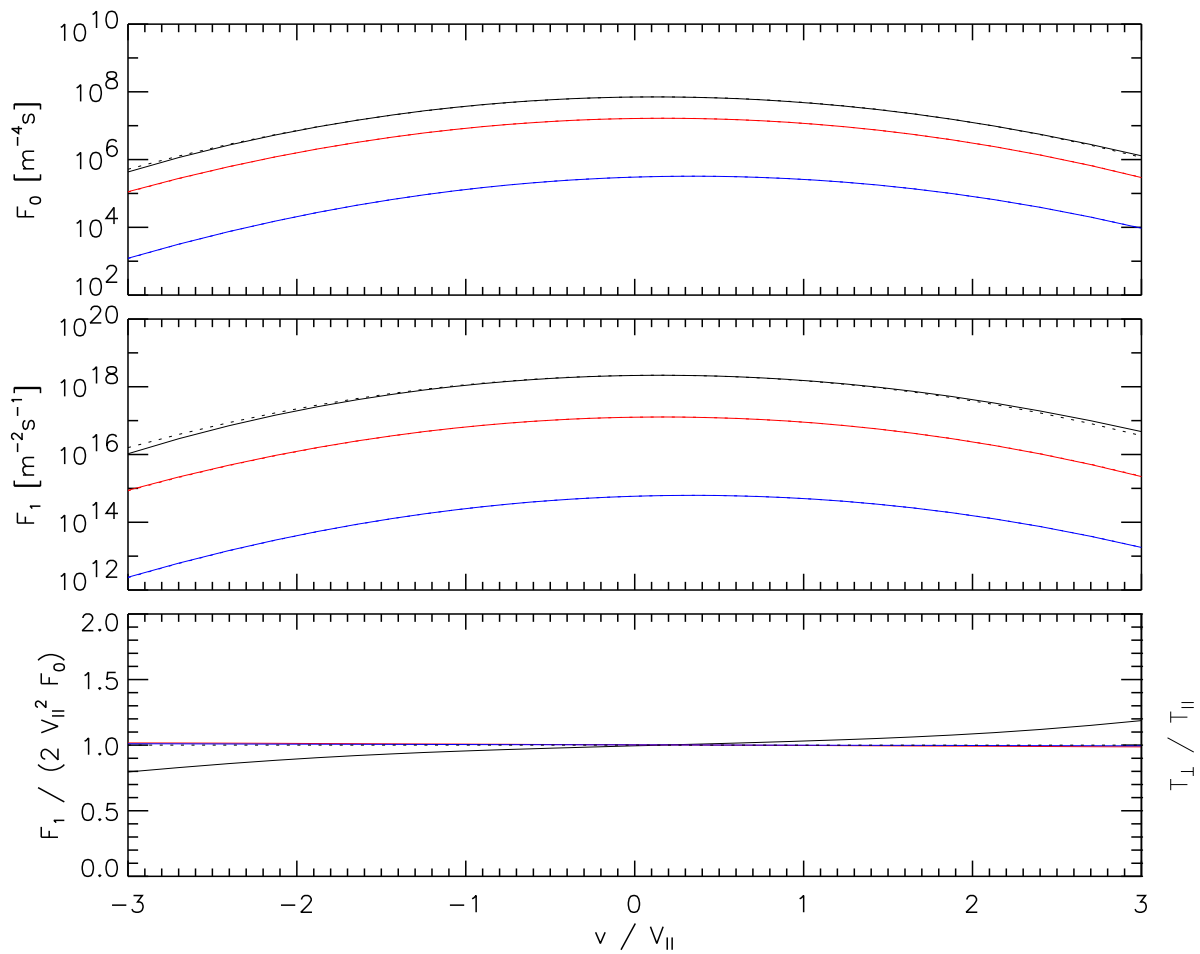


Abbildung 5.16: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen (schwarz), des He^{2+} (rot) und des O^{5+} (blau) in einer Höhe von 160 960 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an.

Temperaturabfall. Die reduzierten Verteilungen weisen wie schon bei der Rechnung mit einem Protonenplasma eine wesentlich größere Ähnlichkeit mit einer Maxwellverteilung auf, und es ist keine Signatur der Welle - Teilchen - Wechselwirkung zu erkennen. Genau wie bei dem Plot der $F_{j,k}$ aus der Übergangszone sind die Abweichungen von einer Maxwellverteilung für die schweren Ionen deutlich geringer als für die Protonen, bei denen dem Temperaturabfall entsprechend ein schwacher nach oben gerichteter Wärmestrom zu erkennen ist.

Insgesamt weist die Rechnung mit mehreren Ionensorten große Ähnlichkeiten zu den Ergebnissen für ein Protonenplasma auf. Die Hinzunahme mehrerer Ionensorten zeigt, daß die Verteilungen der schweren Ionen aufgrund ihrer effektiveren Coulomb - Stöße geringer von einer Maxwellverteilung abweichen als die Protonen.

Der Heizungsprozeß ist erneut auf den unteren Bereich des Rechenfeldes konzentriert, wobei eine geringfügig stärkere Heizung der schwereren Ionen und eine leichte Erhöhung der T_{\perp} gegenüber den T_{\parallel} festzustellen ist. Dies ist konsistent mit Beobachtungen der Korona, aber der hier numerisch festgestellte Effekt ist nur sehr gering.

Ergebnisse für ein variables Wellenspektrum

Die Simulation eines Mehrkomponentenplasmas unter dem Ansatz eines starren Spektrums weist mit der Lokalisierung der Heizung auf den unteren Bereich des Rechenfeldes durch die Absorption der Wellenenergie und den willkürlichen Faktor $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$ dieselben Probleme auf wie schon bei einem Protonen - Elektronen - Plasma. Die größere physikalische Aussagekraft sollte daher auch hier das auf einem variablen Spektrum basierende Modell aufweisen.

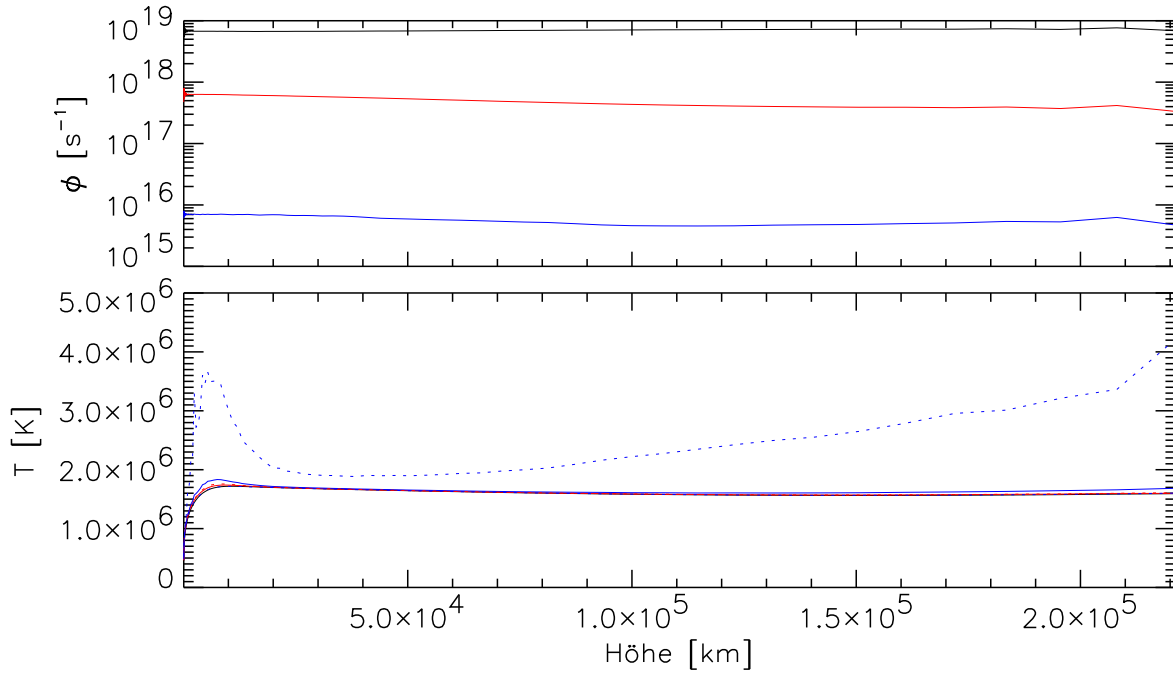


Abbildung 5.17: Höhenprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot) und O^{5+} (blau) unter Annahme eines variablen Wellenspektrums. Das Temperaturprofil stellt die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien) dar.

Die Abbildung 5.17 zeigt die unter Verwendung eines variablen Spektrums gewonnenen Höhenprofile der Teilchenflüsse und der Temperaturen. Die Teilchenflüsse weisen erneut konstante Werte im Rechenfeld auf, das numerische System hat einen stationären Endzustand gefunden.

Die Höhenprofile der Temperatur unterscheiden sich dagegen grundlegend sowohl von den Ergebnissen der Rechnung mit einem starren Spektrum als auch von der Simulation eines Einkomponentenplasmas.

Die Profile der Protonen und des Heliums unterscheiden sich wenig von denen der Protonen in Abbildung 5.9 der Simulation eines Plasmas mit Protonen als einziger Ionensorte. Einen völlig anderen Verlauf weisen dagegen die Profile von T_{\perp} und T_{\parallel} des Sauerstoffs auf. Das Profil von T_{\parallel} unterscheidet sich nur wenig von den Profilen der anderen Ionensorten, allerdings tritt im unteren Bereich des Rechenfeldes ein kleines Temperaturmaximum auf. T_{\perp} schließlich hat deutlich höhere Werte als die anderen Temperaturen. Im Bereich des unteren Randes kommt es zu einem ausgeprägten Maximum, anschließend fällt T_{\perp} ab, bleibt aber stets größer als T_{\parallel} , um mit zunehmender Höhe wieder anzusteigen. Abgesehen vom unteren Randbereich nimmt die Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$ des O^{5+} mit wachsender Höhe zu.

Die Höhenprofile zeigen eine bevorzugte Heizung des Sauerstoffs, wobei eine Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1$ auftritt. Um den Einfluß der Wellen auf die Verteilungsfunktion der Sauerstoffs abzuschätzen, werden die Stoßfrequenzen der Welle - Teilchen - Wechselwirkung und der Coulomb - Stöße für die O^{5+} - Ionen in einer Höhe von rund $1.6 \cdot 10^5$ km berechnet.

Die Protonen weisen dort eine Dichte von $N_p = 1.82 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$ und eine Temperatur von $T_p = 1.58 \cdot 10^6 \text{ K}$ auf, und die Temperatur des Sauerstoffs beträgt $T_O = 2.69 \cdot 10^6 \text{ K}$. Daraus ergibt sich nach (3.35) eine Coulomb - Stoßfrequenz $\nu = 0.15 \text{ s}^{-1}$. Im Vergleich dazu ist die "Stoßfrequenz" der Welle - Teilchen - Wechselwirkung mit $\frac{1}{\tau} = 0.01 \text{ s}^{-1}$ nach (2.63) wesentlich kleiner. Das Plasma ist daher in einer Höhe von $1.6 \cdot 10^5 \text{ km}$ und damit im oberen Bereich des Rechenfeldes stoßdominiert. Da die Dichte und damit die Coulomb - Stoßfrequenz mit abnehmender Höhe zunimmt, ist das Plasma somit im gesamten Rechenfeld stoßdominiert.

Bei der Rechnung mit einem starren Spektrum war die Stoßfrequenz der Welle - Teilchen - Wechselwirkung um einen Faktor 10^{-6} kleiner als die der Coulomb - Stöße. Hier beträgt der Faktor nur noch 0.1, so daß die Wirkung der Wellen auf die reduzierten Verteilungsfunktionen des Sauerstoffs nicht vernachlässigbar ist.

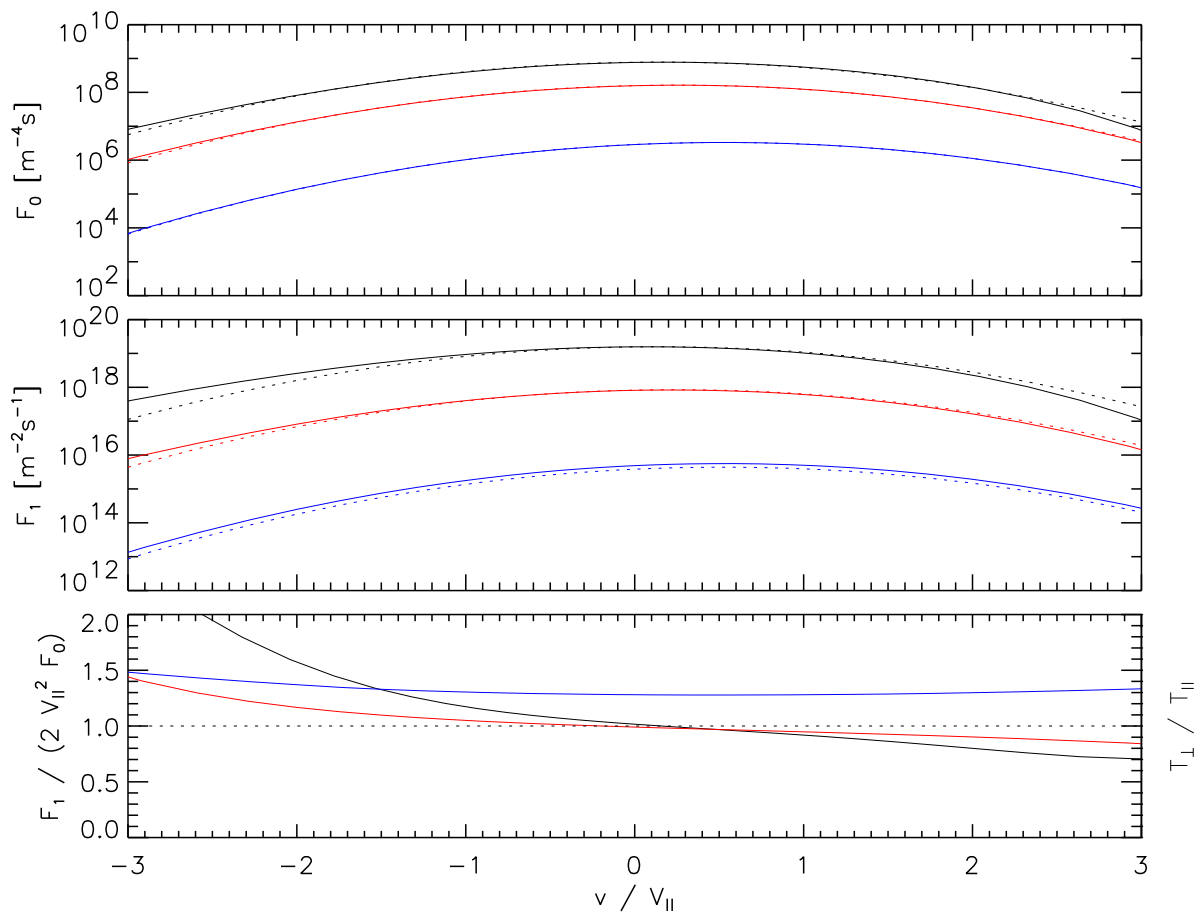


Abbildung 5.18: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen (schwarz), des He^{2+} (rot) und des O^{5+} (blau) in einer Höhe von 1126 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an.

Das interessante Höhenprofil von $T_{O^{5+},\perp}$ kann durch die Betrachtung der reduzierten Vertei-

lungsfunktionen näher untersucht werden. Die Abbildung 5.18 zeigt die $F_{j,k}(v)$ auf einer Höhe von 1126 km und damit im Temperaturgradienten der Übergangszone. Die Verteilungen der Protonen und He^{2+} - Ionen zeigen den schon von der Rechnung mit einem starren Spektrum bekannten, durch die Wärmeleitung in der Übergangszone dominierten Verlauf, wobei die Abweichung von einer Maxwellverteilung bei den Protonen wieder stärker ausgeprägt ist als beim He^{2+} .

Ganz anders verhält sich dagegen der Sauerstoff. Bei seinem $F_0(v)$ ist wie schon bei der Simulation eines starren Spektrums kaum eine Abweichung von der Maxwellverteilung zu erkennen, aber $F_1(v)$ weicht um einen annähernd konstanten Faktor von dem für eine isotrope Maxwellverteilung zu erwartenden Wert ab. Besonders deutlich wird dies an dem Plot der Temperaturanisotropie unten in der Abbildung 5.18. Die Temperaturanisotropie weist einen von v nahezu unabhängigen Wert von 1.4 auf. Der Sauerstoff ist damit Bi-Maxwell - verteilt mit einer deutlichen Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1$. Dies deckt sich auch mit den Temperaturprofilen in Abbildung 5.17, nach denen die Temperaturanisotropie im Bereich des unteren Randes auf einer Höhe von rund 5000 km einen Maximalwert von etwa 2 erreicht.

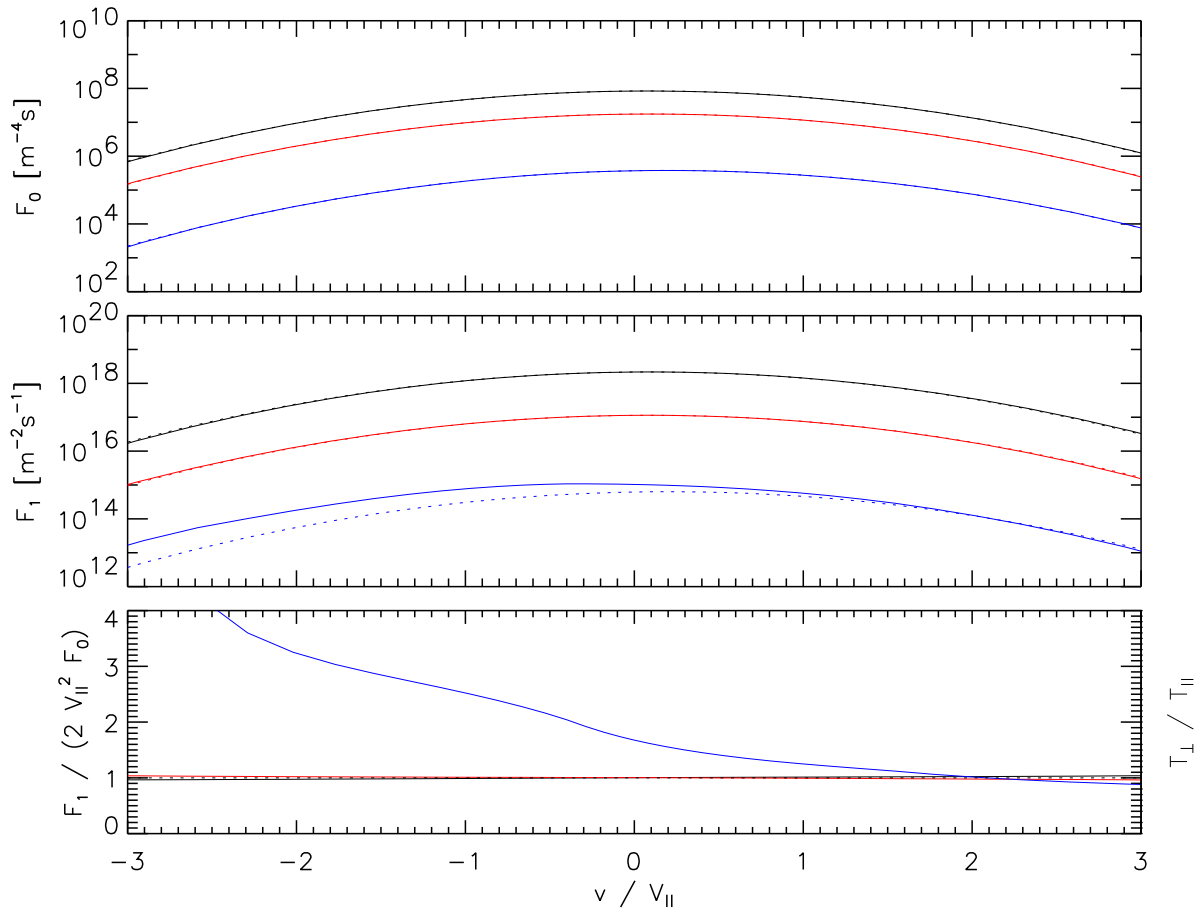


Abbildung 5.19: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen (schwarz), des He^{2+} (rot) und des O^{5+} (blau) in einer Höhe von 160 960 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an.

Auch der in Abbildung 5.19 dargestellte Plot aus einer größeren Höhe von $1.6 \cdot 10^5$ km zeigt

ein unterschiedliches Verhalten von Protonen und He^{2+} einerseits und O^{5+} andererseits. Die reduzierten Verteilungen von Protonen und He^{2+} entsprechen fast exakt isotropen Maxwellverteilungen, es gibt weder eine Spur von Wärmeleitung noch Hinweise auf den Heizungsprozeß. Das Verschwinden eines Wärmestroms ist dabei auf die nach Abbildung 5.17 nahezu konstante Temperatur zurückzuführen.

Auch die reduzierte Verteilung $F_0(v)$ des Sauerstoffs zeigt keine erkennbaren Unterschiede zu den Maxwellschen Werten. Dagegen zeigt $F_1(v)$ besonders im Bereich negativer v , aber auch für $v > 0$ deutliche Abweichungen, die mit einer Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v) > 1$ verbunden sind. Diese nimmt für betragsmäßig wachsende $v < 0$ zu.

Damit ähneln die $F_k(v)$ des Sauerstoffs denen der Protonen bei der Simulation eines Einkomponentenplasmas unter Verwendung eines variablen Spektrums nach Abbildung 5.11. Bei der Diskussion des Plots wurde festgestellt, daß es sich dabei um die Wirkung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung auf die Verteilungsfunktionen handelt. Der Sauerstoff zeigt also deutliche Spuren der Welle - Teilchen - Wechselwirkung, während Protonen und He^{2+} - Ionen davon unbeeinflusst sind. Zusammen mit den Temperaturprofilen führt das zu dem Schluß, daß der Sauerstoff und damit das Ion mit der niedrigsten Gyrofrequenz bevorzugt geheizt wird.

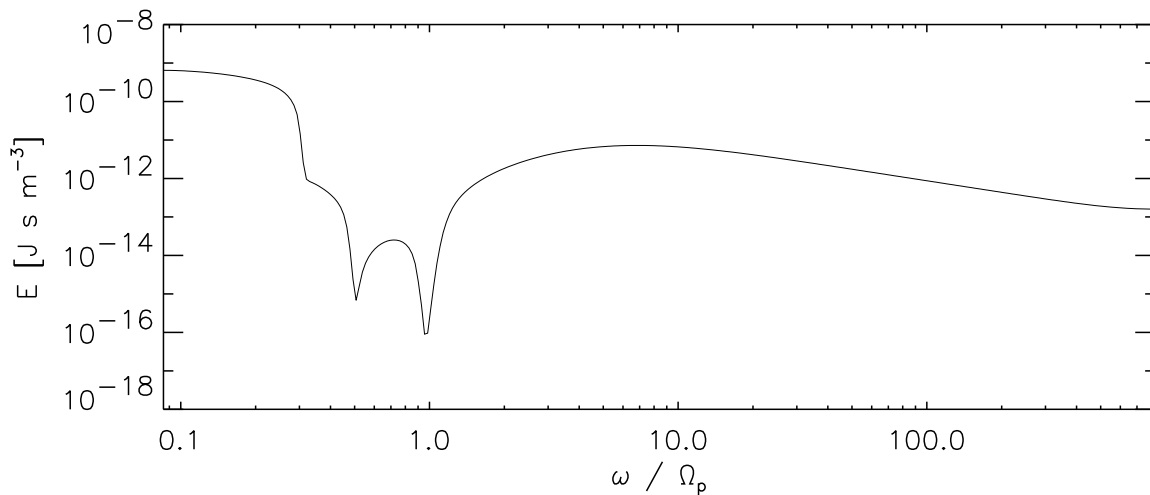


Abbildung 5.20: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 160 960 km

Das Spektrum der Plasmawellen weist auf den Mechanismus hin, nach dem dies geschieht. Die Abbildung 5.20 zeigt das Spektrum der Wellen in einer Höhe von $1.6 \cdot 10^5$ km. Die Absorptionslinien der drei Ionensorten an ihren Gyrofrequenzen Ω_p , $\Omega_{\text{He}^{2+}} = 0.5 \cdot \Omega_p$, $\Omega_{\text{O}^{5+}} = 0.3125 \cdot \Omega_p$ sind deutlich zu erkennen.

Auffällig ist, daß an den Resonanzfrequenzen der Protonen und He^{2+} - Ionen wesentlich weniger Wellenenergie vorliegt als beim Sauerstoff. Es handelt sich dabei um eine direkte Folge der Abnahme der magnetischen Flußdichte und damit der Gyrofrequenzen mit der Höhe in der magnetischen Flußröhre. Wenn die Gyrofrequenz des He^{2+} in einer bestimmten Höhe h_1 den Wert ω_0 aufweist, dann gibt es eine niedrigere Höhe $h_0 < h_1$, wo die der O^{5+} - Ionen schon den Wert ω_0 angenommen hat. Auf diese Weise hat der Sauerstoff schon bei h_0 die nach oben laufenden Wellen der Frequenz ω_0 absorbiert, so daß auf h_1 kaum noch Energie für die Wechselwirkung mit den He^{2+} - Ionen übrig ist. Wenn man eine feste Frequenz ω betrachtet, die

am unteren Rand des Rechenfeldes kleiner als alle Gyrofrequenzen ist, und sich mit den Wellen im Rechenfeld aufwärts bewegt, dann sinken alle Gyrofrequenzen mit der Höhe ab, und in einer bestimmten Höhe erfüllt ω die Resonanzbedingung für die Ionensorte mit der niedrigsten Resonanzfrequenz zuerst.

Auf diese Weise sorgt das “frequency sweeping” dafür, daß die Ionen mit der niedrigsten Gyrofrequenz, hier ist das O^{5+} , in jeder Höhe bis dahin unverbrauchte Wellenenergie vorfinden, während die Ionen mit höheren Gyrofrequenzen erst in größerer Höhe mit denselben Frequenzen in Wechselwirkung treten und für ihre Heizung nur die Wellenenergie übrig bleibt, die noch nicht vom Sauerstoff absorbiert wurde.

Die Veränderung der Gyrofrequenzen im Rechenfeld führt über diesen Mechanismus zu einer bevorzugten Heizung der schweren Ionen, hier des Sauerstoffs. Es ist derselbe Mechanismus, der bei dem $F_1(v)$ des Sauerstoffs genau wie bei der Diskussion der Abbildung 5.11 der Protonenverteilung im Einkomponentenplasma dafür sorgt, daß die Teilchen mit betragsmäßig großem $v < 0$ aufgrund ihrer niedrigeren Resonanzfrequenzen bevorzugt geheizt werden, was zu der deutlichen Geschwindigkeitsabhängigkeit der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ des O^{5+} in Abbildung 5.19 führt.

Auch das ausgeprägte lokale Maximum von T_{\perp} im Höhenprofil der Abbildung 5.17 kann durch die Höhenabhängigkeit der Gyrofrequenzen erklärt werden. Wie aus dem Spektrum in Abbildung 5.20 hervorgeht, gibt es im Bereich der Resonanzfrequenzen des Sauerstoffs einen scharfen Abfall der Wellenenergie. Die Heizrate wird durch die Geschwindigkeit bestimmt, mit der sich diese Absorptionskante als Funktion der Höhe durch das Spektrum bewegt, sie hängt daher von der Verminderung der Gyrofrequenz des O^{5+} ab.

Am unteren Rand des Rechenfeldes weitet sich der koronale Trichter nach Abbildung 5.3 stark auf, so daß die magnetische Flußdichte und die Gyrofrequenzen entsprechend rasch abfallen. Dadurch wird die Heizrate lokal stark erhöht, wovon der Sauerstoff auch dort besonders profitiert.

Ein weiterer Aspekt ist die Entwicklung der Absorptionslinien, wie sie in Abbildung 5.20 zu erkennen sind, aus dem am unteren Rand vorgegebenen ungestörten Spektrum nach Abbildung 5.12. Dort liegt bei allen Frequenzen die ursprüngliche Wellenenergie vor, so daß die Entwicklung der Absorptionslinien mit einem lokal erhöhten Energietransfer von den Wellen auf die Teilchen verbunden ist. Doch da die Breite der Linien mit $\frac{v_{th}}{v_A} \cdot \Omega$ sehr klein ist, ist dieser Effekt nur von untergeordneter Bedeutung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Modell eines variablen Spektrums unter Berücksichtigung mehrerer Ionensorten die beobachteten Eigenschaften des koronalen Plasmas wesentlich besser wiedergibt als das eines starren Spektrums.

Die Hinzunahme weiterer Ionensorten zu den Protonen führt zu interessanten Ergebnissen. Das Modell ist in der Lage, mit der Höhenvariation der Gyrofrequenz die bevorzugte Heizung der schweren Ionen zu erklären, und der Heizungsmechanismus durch resonante Wechselwirkung mit Ionenzyklotronwellen ergibt durch bevorzugtes Anwachsen von T_{\perp} Temperaturanisotropien $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1$. Dadurch reproduziert das Modell wesentliche beobachtete Eigenschaften des koronalen Plasmas.

Bei der Herleitung der die Welle - Teilchen – Wechselwirkung beschreibenden Formeln in Abschnitt 2.3.2 wurden dispersionsfreie Wellen angenommen. Im Bereich der Gyrofrequenzen der schweren Ionen ist dies zulässig, da ihr Einfluß auf das Dispersionsverhalten aufgrund ihrer geringen Teilchenzahl vernachlässigt werden kann. Für die He^{2+} - Ionen und erst recht für die Hauptkomponente des Plasmas, die Protonen, ist das aber eigentlich nicht der Fall. Dennoch wird die Welle - Teilchen – Wechselwirkung auch für die Protonen aufgrund der erheblichen Vereinfachung der Formeln dispersionsfrei gerechnet.

Das Spektrum nach Abbildung 5.20 rechtfertigt diese Vorgehensweise. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Wechselwirkung zwischen den Wellen und den O^{5+} - Ionen kaum Wellenenergie an der Stelle der He^{2+} - Gyrofrequenz übrig gelassen hat, und die Wellenenergie an der Stelle der Protonengyrofrequenz ist noch eine Größenordnung niedriger. Da sich die Resonanzfrequenzen der Ionen aufgrund von $v_{th} \ll v_{ph}$ nur wenig von den Gyrofrequenzen unterscheiden, liegt nur sehr wenig Wellenenergie für eine resonante Wechselwirkung mit He^{2+} - Ionen oder Protonen vor. Deren Verteilungsfunktionen werden daher nur schwach von der Welle - Teilchen – Wechselwirkung beeinflusst, so daß die mit der Vereinfachung dispersionsfreier Wellen verbundenen Fehler nur einen vernachlässigbaren Einfluß auf die $F_k(v)$ der He^{2+} - Ionen und Protonen haben.

5.3 Fortsetzung des Modells in den Sonnenwind

Das im letzten Abschnitt vorgestellte Modell der unteren Korona bis zu etwa 0.3 Sonnenradien lieferte unter Verwendung eines variablen Spektrums sehr gute Ergebnisse. Die Rechnung mit einem Mehrkomponentenplasma zeigt mit Beobachtungen übereinstimmende Eigenschaften des Plasmas wie Temperaturanisotropien und eine bevorzugte Heizung der schweren Ionen.

Die Rechnungen umfassen aber nur die untere Korona, in der subsonische Strömungsgeschwindigkeiten und eine starke Kopplung der Teilchensorten durch Coulomb – Stöße in dem relativ dichten Plasma vorliegen.

Es stellt sich die Frage, wie sich das Plasma in der höheren Korona und beim Übergang in den Sonnenwind entwickelt. Die Beobachtungen von Kohl et al. (1998) mit UVCS auf SOHO beginnen bei 0.2 Sonnenradien über dem Sonnenrand, und die Beobachtungen und Modelle von Tu und Marsch (2001) erst bei 1.4 Sonnenradien über dem Rand. Dort werden die schon erwähnte bevorzugte Heizung der schweren Ionen und extreme Temperaturanisotropien beobachtet.

Daher ist es sinnvoll, die Modellrechnungen über einen größeren Höhenbereich zu erstrecken. Die Anfangs- und Randbedingungen werden dabei weiterhin entsprechend der Abbildung 5.4 vorgegeben.

5.3.1 Modell bis $h = 4 \cdot 10^5$ km

In einem ersten Schritt wird die Höhe des Rechenfeldes auf $4 \cdot 10^5$ km verdoppelt. Es wird wieder ein aus Protonen, He^{2+} - und O^{5+} - Ionen bestehendes Modellplasma betrachtet, wobei die Dichte von He^{2+} 10% und die der O^{5+} - Ionen 0.1% der Protonendichte entspricht.

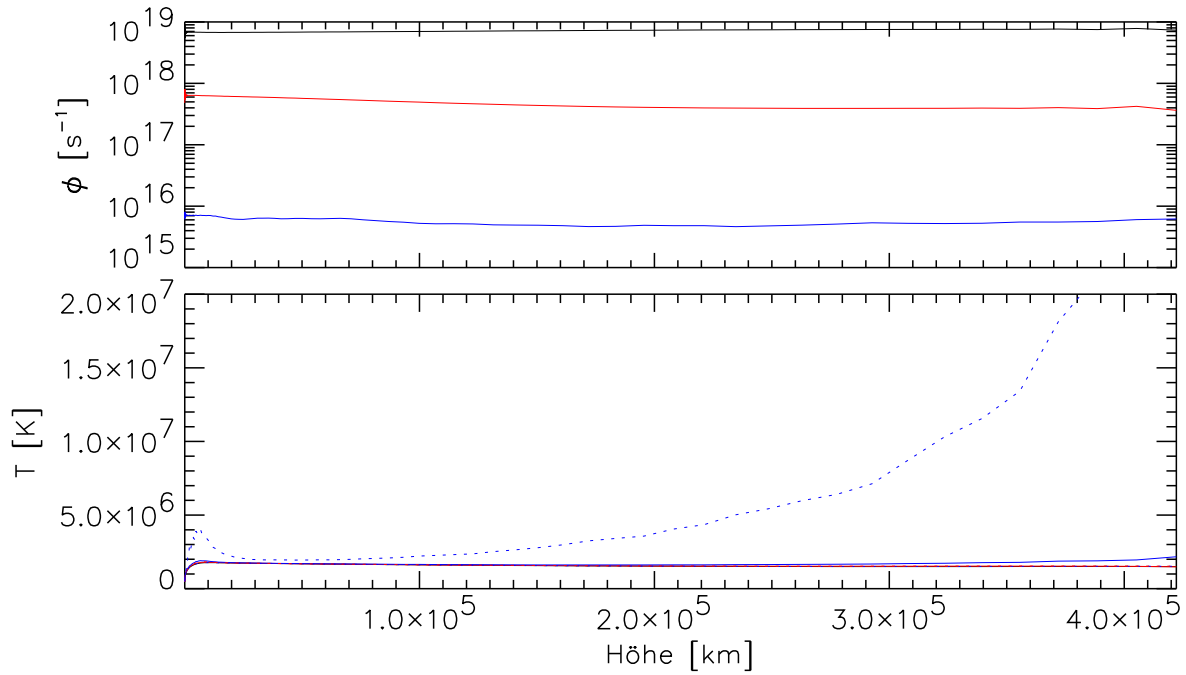


Abbildung 5.21: Höhenprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot) und O^{5+} (blau). Die Temperaturprofile stellen die Werte für $T_{||}$ (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien) dar.

Die Simulationszeit beträgt $t = 3 \cdot 10^4$ s, für eine Höhe des Rechenfeldes von $4 \cdot 10^5$ km entspricht das nach (4.6) 6.2 Transitzeiten T_t . Die Abbildung 5.21 zeigt wie schon im letzten Abschnitt die Höhenprofile der parallelen und senkrechten Temperaturen der verschiedenen Ionensorten sowie die Teilchenflüsse zur Kontrolle auf Konvergenz. Die Flüsse sind in guter Näherung konstant, das numerische System hat einen stationären Zustand gefunden.

Auf den unteren $2 \cdot 10^5$ km sind keine Unterschiede zu den Ergebnissen nach Abbildung 5.17 für das kleinere Rechenfeld zu erkennen. Die Höhenprofile der verschiedenen Temperaturen sind nahezu identisch, und auch die Zahlenwerte der Teilchenflüsse haben sich nicht geändert. Da der Teilchenfluß im Rechenfeld empfindlich auf die Vorgabe von Dichte und Temperatur am oberen Rand reagiert, ist dies angesichts der Verdopplung der Höhe der Rechenfeldes ein gutes Zeichen für die Verlässlichkeit der Ergebnisse.

In größerer Höhe setzt sich die in der unteren Korona festgestellte Entwicklung fort. Die Temperaturprofile der Protonen und des He^{2+} weisen einen sehr flachen Verlauf auf, sie bleiben bei 10^6 K und damit in dem Bereich der Anfangs- und Randbedingung. Die parallele Temperatur des Sauerstoffs verhält sich ähnlich, nur im oberen Bereich des Rechenfeldes tritt ein sehr leichter Anstieg auf.

Die senkrechte Temperatur $T_{\text{O}^{5+}, \perp}$ wächst dagegen mit der Höhe immer weiter an und erreicht zum oberen Rand des Rechenfeldes Werte von $2 \cdot 10^7$ K. Da die parallele Temperatur dort etwa $T_{||} = 2 \cdot 10^6$ K beträgt, entspricht dies einer Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{||}} = 10$. Die Höhenprofile wecken den Eindruck einer Entkopplung zwischen dem durch die Wellen hauptsächlich vergrößerten $T_{\text{O}^{5+}, \perp}$ und den übrigen Temperaturen. Die Ursache hierfür liegt in der mit zunehmender Höhe absinkenden Dichte und den dadurch immer schwächer werdenden Coulomb

– Stößen.

In einer Höhe von rund $h = 10^5$ km beträgt die Dichte der Protonen $N_p = 3.77 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$ und ihre Temperatur $T_p = 1.55 \cdot 10^6$ K. Die Temperatur des Sauerstoffs beträgt $T_O = 1.9 \cdot 10^6$ K, woraus sich nach (3.35) eine klassische Coulomb – Stoßfrequenz von $\nu = 0.37 \text{ s}^{-1}$ für die Stöße des Sauerstoffs an den Protonen ergibt.

Bei $h = 3 \cdot 10^5$ km ist die Protonendichte auf $N_p = 8.4 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ abgesunken, die Protonentemperatur beträgt $T_p = 1.49 \cdot 10^6$ K. Die auf der mittleren thermischen Geschwindigkeit v_{th} des Sauerstoffs basierende Temperatur $T_O = \frac{1}{3}(T_{O^{5+},\parallel} + 2T_{O^{5+},\perp})$ ist auf $T_O = 5.06 \cdot 10^6$ K angestiegen, woraus eine Stoßfrequenz $\nu = 0.076 \text{ s}^{-1}$ folgt.

Die Coulomb – Stoßfrequenz ist also um einen Faktor 5 gesunken, während die “Stoßfrequenz” $\frac{1}{\tau}$ der Welle - Teilchen – Wechselwirkung nach (2.63) in beiden Höhen bei 10^{-2} s^{-1} liegt. Damit ist das Plasma zwar in beiden Höhen stoßdominiert, doch der Rückgang der Coulomb – Stoßfrequenz ermöglicht es den Wellen, eine größere Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht zu erzeugen und insbesondere eine stärkere Temperaturanisotropie des bevorzugt geheizten Sauerstoffs aufrechtzuerhalten.

Die Höhenprofile der Temperaturen zeigen demnach, daß sich der schon beim Modell der unteren Korona deutliche Trend zu einer bevorzugten Heizung des Sauerstoffs unter Entwicklung einer starken Temperaturanisotropie mit zunehmender Höhe fortsetzt.

Zur genaueren Untersuchung des Heizungsprozesses des Sauerstoffs werden die reduzierten Verteilungsfunktionen betrachtet. Da die Ergebnisse in geringer Höhe mit denen der Modellierung der unteren Korona übereinstimmen, werden sie hier nur in größerer Höhe von rund $3 \cdot 10^5$ km betrachtet.

Der Plot der $F_{j,k}(v)$ für $h = 3 \cdot 10^5$ km in Abbildung 5.22 zeigt eine große Ähnlichkeit mit dem der Verteilungen für $h = 1.6 \cdot 10^5$ km in Abbildung 5.19. Die $F_{j,0}(v)$ weisen fast keine Abweichungen von einer Maxwellverteilung auf, auch die Verteilung der Sauerstoff - Ionen nicht. Bei den Protonen deutet sich ein schwacher, aufwärtsgerichteter Wärmestrom an, der dem langsamen Absinken der Protonen- und Heliumtemperatur mit der Höhe in Abbildung 5.21 entspricht.

$F_1(v)$ des Sauerstoffs ist deutlich von der Welle - Teilchen – Wechselwirkung geprägt. Die lokale Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ der $F_k(v)$ ist für alle v größer als 1, wobei für betragsmäßig große negative v sehr hohe Werte von etwa 10 erreicht werden.

Ein Vergleich der Verteilungsfunktionen des Sauerstoffs in $1.6 \cdot 10^5$ km und $3 \cdot 10^5$ km Höhe zeigt auch einige Unterschiede. In der größeren Höhe hat sich für alle v eine Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v) > 1$ eingestellt, während sie in geringerer Höhe für $v > 2 V_{\parallel}$ noch im Bereich 1 oder sogar darunter lag. Der Trend zu einer Zunahme der Anisotropie mit abnehmendem v wurde dabei nicht nur beibehalten, sondern hat sich sogar verstärkt.

Der schon früher diskutierte Effekt einer bevorzugten Heizung der Teilchen mit der niedrigsten Resonanzfrequenz setzt sich also auch in größerer Höhe in der Korona fort. Zwar hat die Ausdehnung des koronalen Trichters längst ihren Maximalwert erreicht, aber da das Magnetfeld großräumig nach Art eines Dipols wie $(\frac{r}{R_{\odot}})^{-3}$ abfällt, sinken die Gyro- und damit Resonanzfrequenzen auch in größerer Höhe weiter ab, so daß der schon diskutierte Effekt des “frequency sweeping” weiterhin dafür sorgt, daß Wellen einer bestimmten Frequenz in einer gewissen Höhe

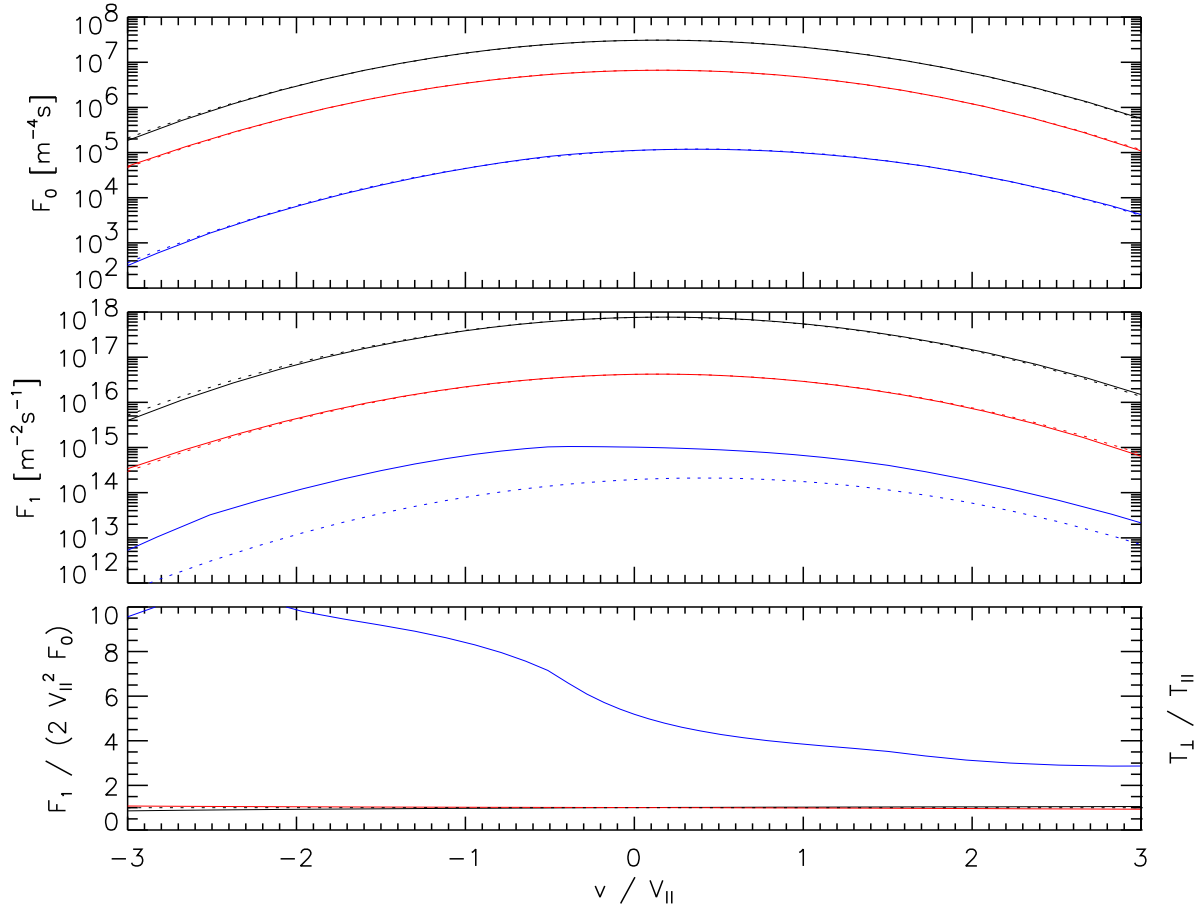


Abbildung 5.22: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Protonen (schwarz), des He^{2+} (rot) und des O^{5+} (blau) in einer Höhe von 307 970 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an.

anfangen, mit den Teilchen zu wechselwirken, wobei zunächst nur die Teilchen mit der niedrigsten Resonanzfrequenz betroffen sind.

Rekonstruktion 2-dimensionaler Verteilungsfunktionen

Der Plot der reduzierten Verteilungen in Abbildung 5.22 stellt zwar die vom Modell gelieferten Informationen dar, vermittelt aber nur einen schwachen Eindruck von der tatsächlichen Form der Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$. Die mit der Einführung (2.2) der reduzierten Verteilungen verbundene Integration über v_{\perp} führte zu dem Verlust der Information über die Abhängigkeit der Verteilung $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ von v_{\perp} . Da ein Plot der 2 - dimensionalen Verteilung $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ aber wesentlich anschaulicher ist als zwei 1 - dimensionale Plots von $F_0(v_{\parallel})$ und $F_1(v_{\parallel})$, soll der Verlauf von $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ aus den $F_k(v_{\parallel})$ soweit wie möglich rekonstruiert werden.

Die Idee dazu besteht darin, daß $F_0(v_{\parallel})$ im wesentlichen die Information über die v_{\parallel} - Abhängigkeit von $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ enthält. $F_1(v_{\parallel})$ beinhaltet im Vergleich dazu die Information über die v_{\perp} - Abhängigkeit. Da F_1 auf einer Integration über alle v_{\perp} mit einer Gewichtsfunktion v_{\perp}^2 basiert,

liefert es jedoch nur einen Wert für die thermische Geschwindigkeit V_\perp und damit für die Breite der Verteilung $f(v_\parallel, v_\perp)$ in v_\perp - Richtung.

Aufgrund dieser Überlegungen kann die Abhängigkeit der Verteilung $f(v_\parallel, v_\perp)$ von v_\perp für jedes v_\parallel mit Hilfe von $F_0(v_\parallel)$ und $F_1(v_\parallel)$ durch eine Maxwellverteilung mit diesem V_\perp angenähert werden.

Dazu wird von der Gaußschen Näherung (2.13) ausgegangen:

$$F_1(v_\parallel) = 2V_\perp^2 F_0(v_\parallel) \quad (5.4)$$

Sie gilt dann exakt, wenn sich die Abhängigkeit des $f(v_\parallel, v_\perp)$ von v_\perp auf eine Maxwellverteilung in dieser Koordinate beschränkt:

$$f(v_\parallel, v_\perp) \propto e^{-\frac{v_\perp^2}{2V_\perp^2}}$$

Aufgrund dieser Beziehung wird der Ansatz eines lokalen $V_\perp(v_\parallel)$ gemacht:

$$V_\perp^2(v_\parallel) = \frac{F_1(v_\parallel)}{2F_0(v_\parallel)} \quad (5.5)$$

Dieses lokale $V_\perp(v_\parallel)$ wird in den Ansatz einer Maxwellverteilung in v_\perp

$$f(v_\parallel, v_\perp) = \frac{F_0(v_\parallel)}{2\pi V_\perp^2} \cdot e^{-\frac{v_\perp^2}{2V_\perp^2}}$$

eingesetzt:

$$f(v_\parallel, v_\perp) = \frac{F_0^2(v_\parallel)}{\pi F_1(v_\parallel)} \cdot e^{-\frac{v_\perp^2 F_0(v_\parallel)}{F_1(v_\parallel)}} \quad (5.6)$$

Damit ist es nun möglich, aus dem Verhältnis von $F_1(v_\parallel)$ zu $F_0(v_\parallel)$ eine lokale thermische Geschwindigkeit $V_\perp(v_\parallel)$ zu definieren und ein $f(v_\parallel, v_\perp)$ durch den Ansatz einer lokalen Maxwellverteilung mit diesem $V_\perp(v_\parallel)$ zu konstruieren.

Die Abbildung 5.23 zeigt die so gewonnene Verteilungsfunktion $f(v_\parallel, v_\perp)$ des Sauerstoffs in einer Höhe von rund $3 \cdot 10^5$ km als Contour - Plot. Die Zahlenwerte sind auf den Maximalwert der Verteilung normiert, um den Abfall mit wachsender Geschwindigkeit deutlicher sichtbar zu machen. Beide Geschwindigkeitskoordinaten sind auf die parallele thermische Geschwindigkeit normiert. Durch die Verwendung der gleichen Normierung für v_\parallel und v_\perp wird sichergestellt, daß Anisotropien deutlich zu erkennen sind. Eine isotrope Maxwellverteilung würde in dem Plot durch konzentrische Kreise dargestellt werden, eine anisotrope Bi-Maxwellverteilung dagegen durch Ellipsen. Der Mittelpunkt des Plots wurde in v_\parallel - Richtung auf die Driftgeschwindigkeit v_D verschoben.

Da das Plasma in dieser Höhe subsonisch ist ($v_D < V_\parallel$), wird bei der folgenden Diskussion der Verteilungsfunktion aus Gründen der Übersichtlichkeit stets von v_\parallel anstelle von $v_\parallel - v_D$ gesprochen. Mit "positiven v_\parallel " ist daher eigentlich " $v_\parallel > v_D$ " gemeint. Dies gilt auch für die Diskussionen der Verteilungsfunktionen schwerer Ionen in den folgenden Abschnitten.

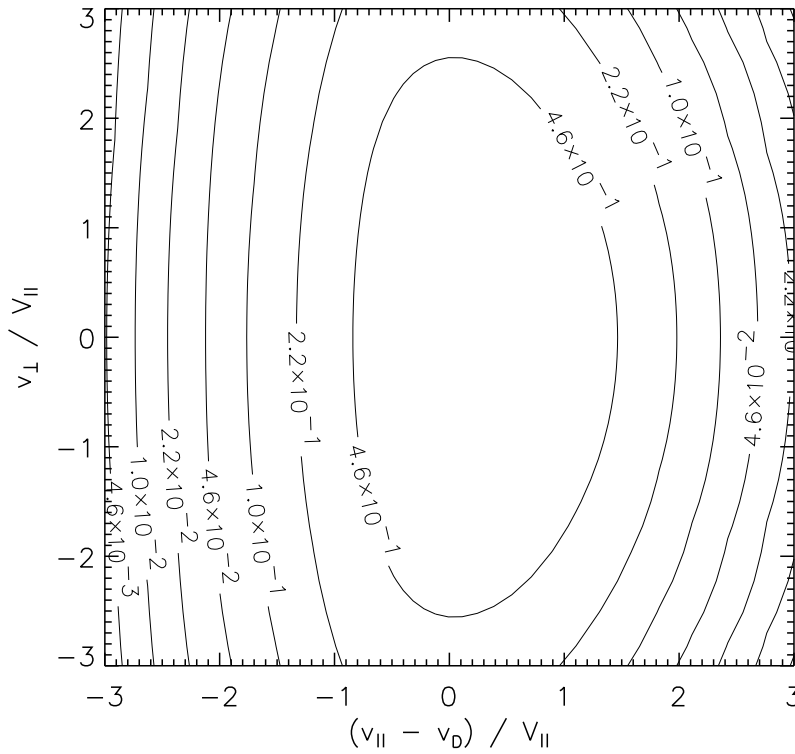


Abbildung 5.23: Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 307 970 km.

Der Plot weist deutliche Abweichungen der Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ von einer Maxwellverteilung auf. Zuerst fällt die Temperaturanisotropie als längliche Ausdehnung in v_{\perp} - Richtung auf. Aufgrund des Ansatzes (5.6) für $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ ist die Darstellung spiegelsymmetrisch zu der Achse $v_{\perp} = 0$.

Auch in v_{\parallel} - Richtung zeigt der Plot interessante Eigenschaften. Er ist bezüglich der Achse $v_{\parallel} = v_D$ asymmetrisch. Es ist zu erkennen, daß die Verteilungsfunktion in negativer v_{\parallel} - Richtung wesentlich schneller abfällt als für positive v_{\parallel} .

Für positive v_{\parallel} deutet sich damit eine Population von der Sonne weg laufender Teilchen an, eine richtige “Beam - Verteilung” tritt hier jedoch noch nicht auf. Da die Welle - Teilchen - Wechselwirkung der einzige Term in der Vlasov - Gleichung (2.32) ist, der zu einer starken Abweichung der Verteilungsfunktion von der Maxwellverteilung führt, handelt es sich bei der Deformation der Verteilung um die Wirkung der Wellen, an der ausgedehnten Verteilung in positiver v_{\parallel} - Richtung wird der Prozeß der Beschleunigung des Plasmas durch die Wellen sichtbar.

Die Form der Verteilungsfunktion mit einem relativ steilen Gradienten zur Sonne hin und langsamerem Abfall in der der Sonne abgewandten Richtung sowie der Andeutung eines “Beams” weist Ähnlichkeiten mit den Protonenverteilungen im Sonnenwind auf, wie sie z.B. von Marsch et al. (1982) und Schwenn und Marsch (1991) gezeigt werden. Dies ist ein sehr schönes Ergebnis, das kinetische Modell liefert Ionenverteilungen, wie sie auch tatsächlich gemessen werden.

Zwar wurden die Daten von Marsch et al. (1982) mit der Raumsonde Helios und damit minde-

stens 0.3 AU von der Sonne entfernt aufgenommen, aber da es sich sowohl bei den Modellrechnungen für die Korona als auch bei den Messungen im Sonnenwind um Ionenverteilungen unter dem Einfluß von Welle - Teilchen - Wechselwirkung und Stoßprozessen (vgl. Marsch und Goldstein (1983)) handelt, sind Verteilungsfunktionen mit denselben wesentlichen Eigenschaften zu erwarten.

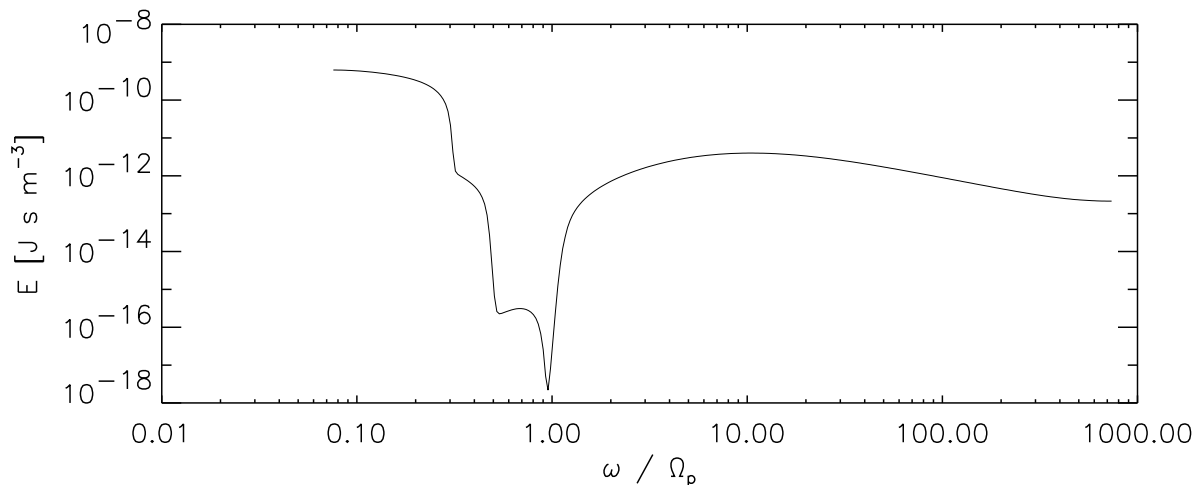


Abbildung 5.24: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 307 970 km

Beim Spektrum der Wellen in einer Höhe von $3 \cdot 10^5$ km nach Abbildung 5.24 gibt es keine grundlegenden Änderungen gegenüber dem Spektrum bei $1.6 \cdot 10^5$ km nach Abbildung 5.20. Es sind auch hier die Absorptionslinien der drei Ionensorten zu erkennen, wobei nur die Sauerstoffionen mit bisher unverbrauchter Wellenenergie in Wechselwirkung treten können und so bevorzugt geheizt werden.

Der Anstieg der Wellenenergie bei Frequenzen $\omega > \Omega_p$ ist wie schon bei der Diskussion des Spektrums in einem Protonenplasma in Abschnitt 5.2.1 erwähnt auf die Diffusion von Wellenenergie im Frequenzraum nach Abschnitt 3.2.2 zurückzuführen.

Aufgrund der Struktur der “Stoßfrequenz” $\frac{1}{\tau}$ der Welle - Teilchen - Wechselwirkung ist zu erwarten, daß die Stärke der Absorption der Wellen durch die verschiedenen Ionensorten j linear von $N_j \cdot (\frac{q_j}{m_j})^2$ abhängt. Doch die Diffusion im Frequenzraum sorgt dafür, daß der Abfall der spektralen Wellenenergiedichte an den Gyrofrequenzen der verschiedenen Ionensorten in Abbildung 5.24 nicht proportional zu dieser Größe ist.

5.3.2 Modell über 3 Sonnenradien

Nach der Rechnung über eine Höhe von $4 \cdot 10^5$ km, die nur etwas mehr als einen halben Sonnenradius umfaßt, wird jetzt versucht, das Modell über rund 3 Sonnenradien bis in den Sonnenwind hinein fortzusetzen.

Dabei stellt es sich jedoch heraus, daß die Rechnung nicht in einen stationären Zustand konvergiert, sondern nach einer Simulationszeit, die mit $t = 4500$ s relativ kurz gegenüber der Transitzeit von $T_t = 10^4$ s ist, abbricht.

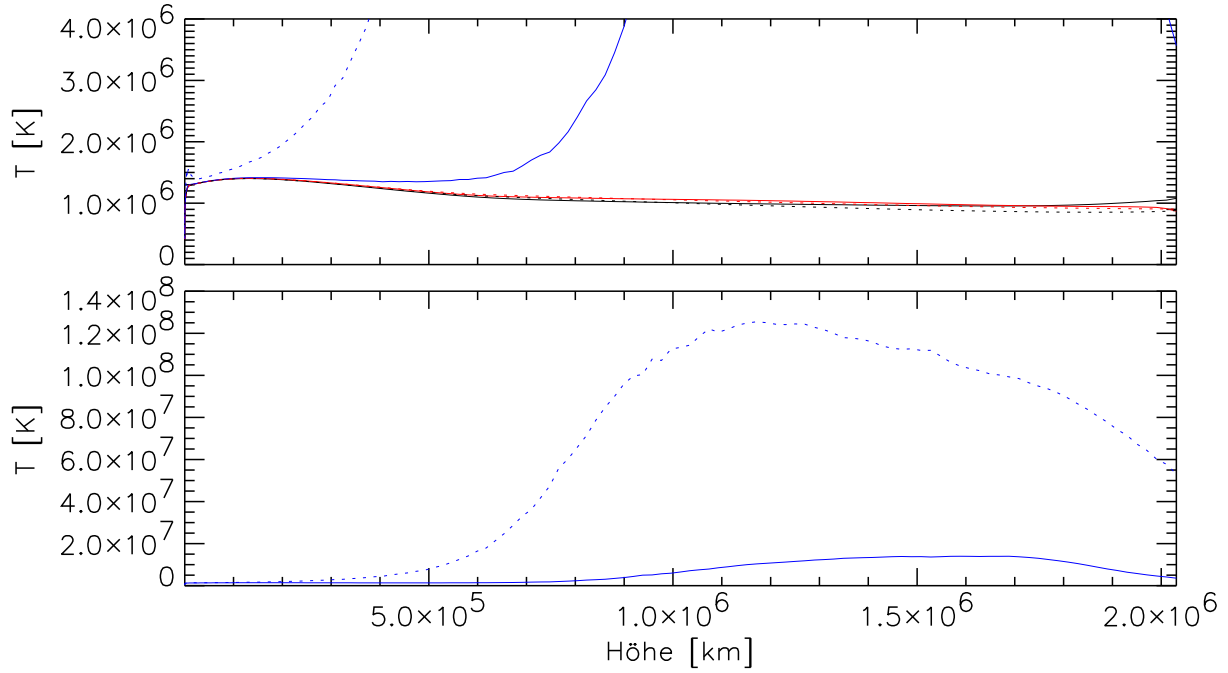


Abbildung 5.25: Temperaturprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot) und O^{5+} (blau). Dargestellt sind die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien).

Die Abbildung 5.25 stellt die Höhenprofile der Temperatur nach einer Simulationszeit von $t = 3500$ s dar. Durch die Wahl einer vor dem Zeitpunkt des Abbruchs liegenden Rechenzeit kann ein Plasmazustand untersucht werden, der sich schon deutlich vom Anfangszustand entfernt hat, aber noch nicht die letztlich zum Abbruch führende numerische Instabilität aufweist. Auf den Plot der Teilchenflüsse wird verzichtet, da kein stationärer Zustand erreicht worden ist.

Der untere Teil der Abbildung 5.25 zeigt die Höhenprofile der parallelen und senkrechten Temperatur des Sauerstoffs. Es sind extrem hohe Werte speziell von $T_{\text{O}^{5+},\perp}$ festzustellen, die senkrechte Temperatur erreicht Werte von 10^8 K. Die parallele Temperatur weist dagegen erheblich niedrigere Werte auf, nur im oberen Bereich des Rechenfeldes steigt auch $T_{\text{O}^{5+},\parallel}$ an, bleibt jedoch in der Größenordnung 10^7 K. Dementsprechend erreicht die Temperaturanisotropie sehr große Werte $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \approx 10$.

Der obere Teil von Abbildung 5.25 zeigt den Bereich relativ niedriger Temperaturen bis $4 \cdot 10^6$ K. Dargestellt sind die Temperaturen der Protonen und des He^{2+} , die sich kaum voneinander unterscheiden. Im unteren Bereich des Rechenfeldes ist auch $T_{\text{O}^{5+},\parallel}$ zu erkennen, doch die parallele Temperatur des Sauerstoffs steigt bei etwa $1R_{\odot}$ stark an und verläßt den Wertebereich des Plots.

Damit setzt sich der schon bei den vorhergehenden Rechnungen deutliche Trend bei der Entwicklung der Temperaturprofile fort. Durch die bevorzugte Erhöhung von $T_{\text{O}^{5+},\perp}$ findet eine Entkopplung von den übrigen Temperaturen statt, die schließlich zu extrem hohen Werten von $T_{\text{O}^{5+},\perp}$ führt. Schon die Abbildung 5.21 weist im Bereich ihres oberen Randes bei etwa $4 \cdot 10^5$ km einen Anstieg auch von $T_{\text{O}^{5+},\parallel}$ auf, der sich hier fortsetzt und zu hohen Werten der Ordnung 10^7 K führt. Der Temperaturabfall des Sauerstoffs zum oberen Rand hin ist auf die Randbedin-

gung dort zurückzuführen, die mit der Anfangsbedingung übereinstimmt und eine Temperatur von etwa 10^6 K für alle Teilchensorten vorsieht.

Die Werte von $T_{O^{5+},\perp} = 10^8$ K und $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 10$ und höher sind zwar extrem, stimmen aber mit Beobachtungen wie denen von Kohl et al. (1998) überein.

Auch die Temperaturen der Protonen und des He^{2+} zeigen mit zunehmender Höhe eine leichte Entkopplung. Ab einer Höhe von etwa einem Sonnenradius oberhalb der Übergangszone trennen sich parallele und senkrechte Temperaturen, wobei die senkrechten Temperaturen in größerer Höhe etwas niedriger sind. Die Ursache hierfür liegt in der mit der Höhe abnehmenden Dichte und den damit immer schwächer werdenden Coulomb – Stößen, die schließlich nicht mehr in der Lage sind, die Kopplung zwischen T_{\parallel} und T_{\perp} aufrechtzuerhalten.

Die immer schwächer werdenden Coulomb – Stöße sind auch die Ursache für die extrem hohen Temperaturen des Sauerstoffs. Schon im vorherigen Abschnitt wurde festgestellt, daß die Coulomb – Stoßfrequenz mit zunehmender Höhe abfällt, während die Stoßfrequenz $\frac{1}{\tau}$ der Welle - Teilchen – Wechselwirkung im wesentlichen gleich geblieben ist. Dadurch konnte sich eine mit der Höhe zunehmende Temperaturanisotropie ausbilden. Das Plasma blieb aber stets stoßdominiert.

Doch mit weiter wachsendem Abstand von der Sonne nimmt die Coulomb – Stoßfrequenz immer weiter ab. Zwar sinkt die Wellenenergiedichte aufgrund der Aufweitung der magnetischen Flußröhre auch in nicht von Absorption in geringerer Höhe betroffenen Frequenzbereichen, doch diese Abnahme erfolgt deutlich langsamer. In einer Höhe von etwa $1.5 \cdot 10^6$ km $\approx 2R_{\odot}$ oberhalb der Übergangszone ist die Protonendichte auf $1.98 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$ abgesunken, und die Protonentemperatur beträgt $9.16 \cdot 10^5$ K. Die mittlere Temperatur des Sauerstoffs ist auf $7.9 \cdot 10^7$ K angestiegen, woraus sich eine Coulomb – Stoßfrequenz von $\nu = 3.86 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ergibt. Die der Welle - Teilchen – Wechselwirkung zugeordnete Stoßfrequenz nimmt in derselben Höhe den Wert $\frac{1}{\tau} = 3.56 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ an.

Die Stoßfrequenzen der Coulomb – Stöße und der Welle - Teilchen – Wechselwirkung weisen demnach dieselben Werte auf, das Plasma ist nicht mehr stoßdominiert. In noch größerer Höhe wird die Wirkung der Wellen die der Coulomb – Stöße sogar übertreffen. Daher ist das Plasma nicht mehr in der Lage, die $T_{O^{5+},\perp}$ zugeführte Energie durch Coulomb – Stöße auf die anderen Ionensorten oder auch $T_{O^{5+},\parallel}$ zu übertragen. Der Anstieg von $T_{O^{5+},\parallel}$ mit der Höhe im oberen Bereich des Rechenfeldes wird durch den Diffusionsterm des Welle - Teilchen – Operators für $F_0(v)$ nach (2.49) bewirkt. In einem realen Plasma wird die Verteilungsfunktion des Sauerstoffs schließlich instabil werden und zur Emission von Wellen führen, mit deren Hilfe dann eine Heizung der anderen Ionensorten möglich ist. Doch ein solcher Mechanismus ist in dem hier vorgestellten Modell nicht vorgesehen. Auf die Frage der Stabilität der Verteilungsfunktionen wird am Ende dieses Abschnitts eingegangen.

Die Dominanz der Welle - Teilchen – Wechselwirkung gegenüber den Coulomb – Stößen ist auch die Ursache dafür, daß diese Modellrechnung nicht in einen stationären Zustand konvergiert. Da das Modellplasma nicht in der Lage ist, die dem Sauerstoff zugeführte Energie auf andere Ionensorten zu übertragen, wächst seine Temperatur unbegrenzt. Das numerische Verfahren bricht spätestens dann ab, wenn die Verteilungsfunktion des Sauerstoffs so breit geworden ist, daß der Wertebereich der Geschwindigkeitskoordinate v sie nicht mehr in ausreichendem Maße abdeckt, so daß bei der Momentenberechnung Fehler auftreten.

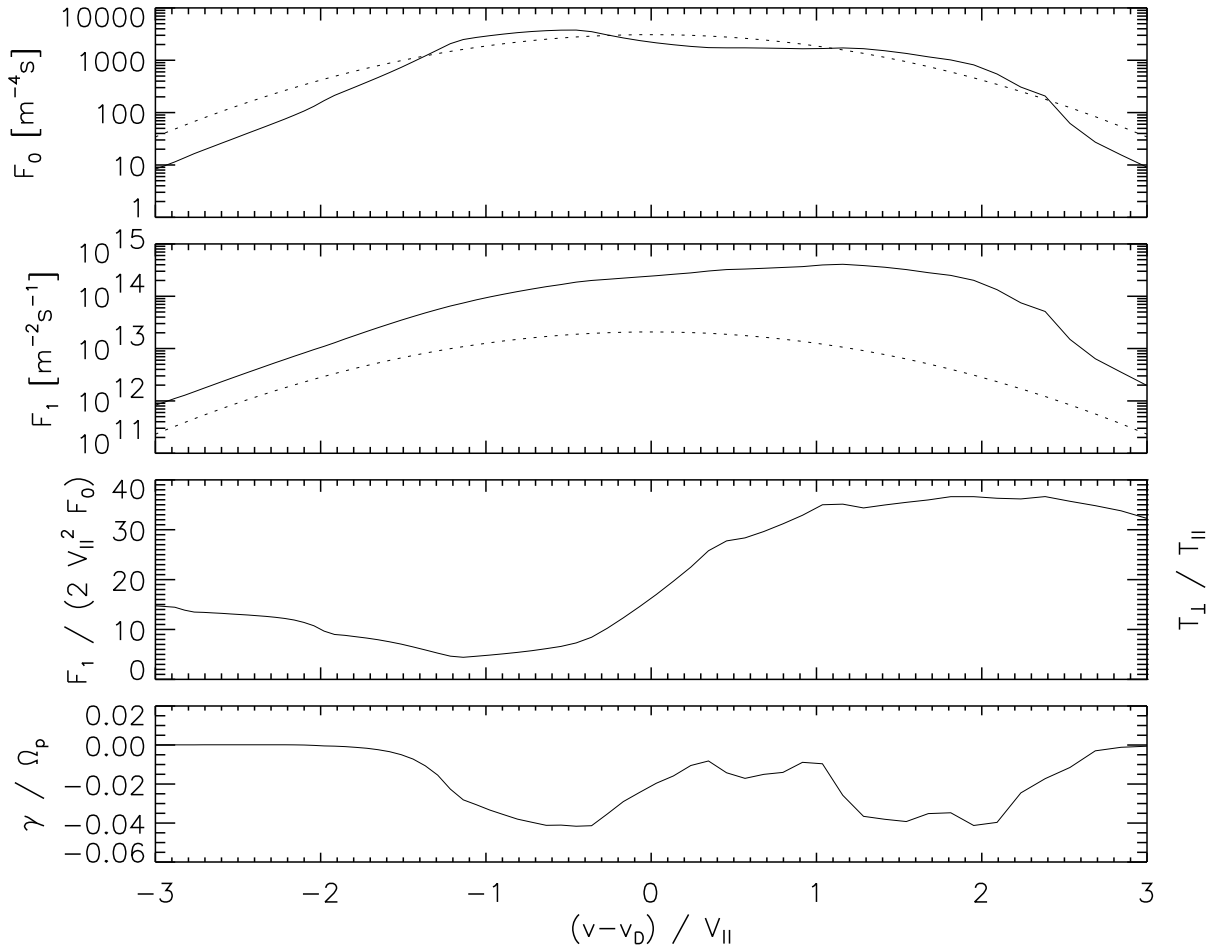


Abbildung 5.26: Reduzierte Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 1 015 400 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an. Zusätzlich ist die Anwachsrate γ der Wellen nach (2.71) dargestellt.

Die Abbildung 5.25 zeigt einen Temperaturabfall des Sauerstoffs im Bereich des oberen Randes des Rechenfeldes. Dies ist eine Folge der Randbedingung, die mit $T = 1.5 \cdot 10^6$ K eine deutlich niedrigere Temperatur vorschreibt als sich im Innern des Rechenfeldes eingestellt hat. Um einen Einfluß des oberen Randes auf die Ergebnisse zu vermeiden, werden die reduzierten Verteilungsfunktionen in einer mitten im Rechenfeld liegenden Höhe von rund 10^6 km und damit etwa $1.5R_{\odot}$ oberhalb der Übergangszone untersucht.

Zwar hat das numerische Verfahren keinen stationären Endzustand gefunden, aber es ist davon auszugehen, daß sich die lokalen Verteilungsfunktionen in einer festgelegten Höhe auf einer wesentlich kürzeren Zeitskala entwickeln als die Höhenprofile im gesamten Rechenfeld, für die die Transitzeit T_t eines Teilchens durch das gesamte Rechenfeld nach (4.6) maßgeblich ist. Daher geben lokale Verteilungsfunktionen trotz der fehlenden Konvergenz der Simulation Aufschlüsse über die im Modellplasma ablaufenden physikalischen Prozesse.

Die Abbildung 5.26 zeigt die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_0(v)$ und $F_1(v)$ der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 1 015 400 km. Aus dem Temperaturprofil in Abbildung 5.25 geht hervor, daß T_{\perp} in dieser Höhe bereits auf Werte der Größenordnung 10^8 K angestiegen ist, und auch T_{\parallel} hat

sich von den Temperaturen der übrigen Ionen entfernt und liegt bei etwa $6 \cdot 10^6$ K. Allerdings sind die thermischen Geschwindigkeiten $V_{\parallel} = 58$ km/s und $V_{\perp} = 242$ km/s immer noch deutlich kleiner als die lokale Alfvéngeschwindigkeit $v_A = 1670$ km/s.

Sowohl $F_0(v)$ als auch $F_1(v)$ zeigen deutliche Abweichungen von der Maxwellverteilung. F_0 weist Deformationen mit einem relativ raschen Abfall bei negativen v und einer deutlich langsameren Abnahme bei positiven v auf. Damit zeigt F_0 dieselbe Eigenschaft, die schon bei dem Plot der rekonstruierten 2 - dimensionalen Verteilung $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ in Abbildung 5.23 in einer Höhe von $3 \cdot 10^5$ km festgestellt wurde.

F_1 ist wie bei den früheren Höhenprofilen stark durch den Heizungsprozeß beeinflusst. Es liegt für alle v eine lokale Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1$ vor, die sehr hohe Werte bis zu 40 erreicht. Anders als bei den vorhergehenden Plots erreicht die Anisotropie ihr Maximum hier nicht bei negativen v , sondern im Bereich positiver v .

Dies ist ein interessantes Ergebnis, da auch hier die negativen v besonders niedrige Resonanzfrequenzen aufweisen und daher eher unverbrauchte Wellenenergie vorfinden als die Teilchen mit positivem v , so daß F_1 bei negativen v besonders groß sein sollte.

Doch diese einfache Überlegung gilt nur, solange die Welle - Teilchen - Wechselwirkung für eine Absorption der Wellen sorgt. Stark anisotrope Verteilungsfunktionen werden jedoch instabil und führen zu einer Emission von Wellen. Daher kann im Laufe des Heizungsprozesses ein Zustand erreicht werden, in dem die Verteilungsfunktionen gerade die Grenze der Stabilität erreichen, so daß es keine weitere Absorption der Wellenenergie gibt.

Um diese Effekte näher zu untersuchen, enthält die Abbildung 5.26 zusätzlich einen Plot der Anwachsrate γ nach (2.71) als Funktion der Resonanzgeschwindigkeit, normiert auf die Protonengyrofrequenz Ω_p .

Zunächst ist festzustellen, daß die Zahlenwerte für $\frac{\gamma}{\Omega_p}$ im Bereich 10^{-2} liegen, so daß die in Abschnitt 2.3.2 bei der Berechnung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung gemachte Annahme einer scharfen Resonanz $\gamma \rightarrow 0$ gerechtfertigt ist. Ferner ist γ für alle v kleiner oder gleich 0. Es gibt kein v , für das $\gamma > 0$ ist, d.h. die reduzierten Verteilungen des Sauerstoffs zeigen keine Instabilität, die zu einer Wellenanregung führt.

Die weitere Analyse des Verlaufs von γ wird dadurch erschwert, daß γ linear von der Zahl der für die resonante Wechselwirkung zur Verfügung stehenden Teilchen und somit von $F_0(v)$ abhängt. In der Abbildung 5.26 ist eine deutliche Abhängigkeit zwischen γ und F_0 zu erkennen. Negative γ und damit Absorption von Wellen treten dort auf, wo $F_0(v)$ maximal wird und im Bereich des sehr langsamen Abfalls von F_0 bei positiven v . Dagegen geht γ für große $|v|$, $v < 0$, für die F_0 stark abfällt, gegen Null.

Es kann dabei nicht unterschieden werden, ob γ deswegen verschwindet, weil die Verteilungsfunktion die Grenze der Stabilität erreicht hat, oder weil einfach keine Teilchen für die resonante Wechselwirkung zur Verfügung stehen. Dieses Problem kann dadurch umgangen werden, daß γ nicht nur auf die Gyrofrequenz Ω_p , sondern auch auf die reduzierte Verteilung $F_0(v)$ normiert wird. Dadurch wird nicht die Anwachsrate γ selber, sondern eine "Anwachsrate pro Teilchen" geplottet.

Die Abbildung 5.27 stellt die so normierte Anwachsrate γ dar. Es ist zu erkennen, daß γ für negative v fast bei Null liegt. Im Bereich des linken Randes treten schwach positive γ und damit

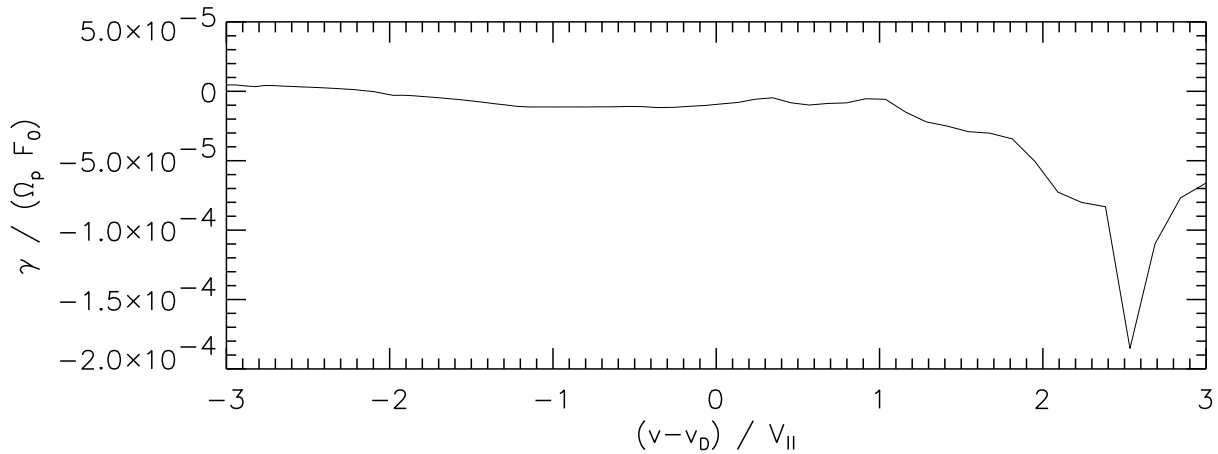


Abbildung 5.27: Anwachsrates γ als Funktion der Resonanzgeschwindigkeit der O^{5+} - Ionen, normiert auf die Gyrofrequenz Ω_p und die reduzierte Verteilung F_0 der O^{5+} - Ionen.

eine Instabilität des Plasmas auf, allerdings zeigt ein Vergleich mit dem $F_0(v)$ in Abbildung 5.26, daß für diese Geschwindigkeit nur sehr wenige Teilchen mit den Wellen wechselwirken, so daß die Instabilität praktisch keine Rolle spielt.

Für positive v ändert sich das Verhalten von γ . Es treten nun deutlich negative Werte auf, die Wellen werden von den Teilchen mit diesen Geschwindigkeiten absorbiert. Der Peak bei $v = 2.5v_{||}$ wird durch den raschen Abfall von $F_0(v)$ und $F_1(v)$ bei dieser Geschwindigkeit verursacht und ist damit als Artefakt zu betrachten, doch der Trend einer Zunahme von $|\gamma|$ mit v ist eindeutig.

Damit wurde eine Erklärung für die ungewöhnliche Lage des Maximums der Temperaturanisotropie bei positiven v gefunden. Im Bereich dieser v findet eine Absorption der Wellen statt, so daß die Anisotropie durch die bevorzugte Heizung von F_1 anwächst. Zwar bekommen die Teilchen mit negativem v durch den Mechanismus des “frequency sweeping” zuerst Gelegenheit, mit den Wellen zu wechselwirken, doch die Verteilungsfunktion hat für diese v die Grenze der Stabilität erreicht, so daß die Wellen nicht absorbiert werden. Auf die Stabilität der Verteilungsfunktionen wird im nächsten Unterabschnitt genauer eingegangen.

Auch hier kann nach (5.6) eine 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{||}, v_{\perp})$ der O^{5+} - Ionen konstruiert werden. Die Abbildung 5.28 zeigt die so gewonnene $f(v_{||}, v_{\perp})$ in einer Höhe von 1015400 km. Zuerst fällt die extreme Anisotropie auf. Die Ausdehnung in v_{\perp} - Richtung ist wesentlich größer als in $v_{||}$ - Richtung. Außerdem lassen sich die schon in Abbildung 5.26 deutlichen Eigenschaften der Verteilung $F_0(v)$ wiederfinden, für negative $v_{||}$ gibt es einen raschen Abfall der Verteilung, während die Abnahme für positive $v_{||}$ deutlich langsamer erfolgt.

In diesen Eigenschaften stimmt die Verteilung mit dem in Abbildung 5.23 dargestellten Ergebnis in einer Höhe von $3 \cdot 10^5$ km überein, allerdings ist die Deformation der Verteilungsfunktion hier aufgrund der extremen Anisotropie nicht zu erkennen.

Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von $1 \cdot 10^6$ km nach Abbildung 5.29 weist keine wesentlichen Änderungen gegenüber früheren Ergebnissen aus geringerer Höhe auf. Die Absorption der Wellen an den Gyrofrequenzen der drei Ionensorten ist deutlich zu erkennen. Nur

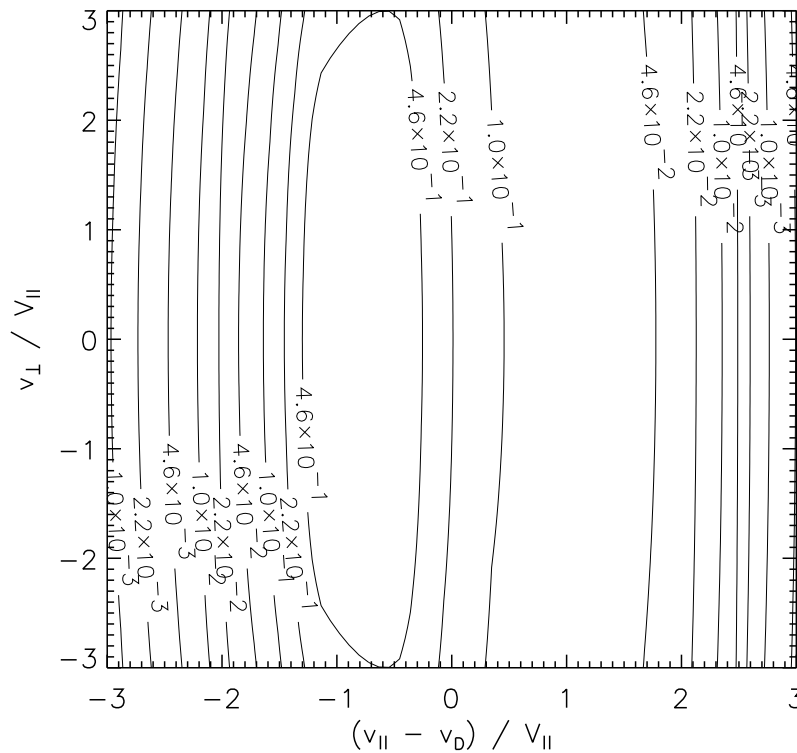


Abbildung 5.28: Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{||}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 1 015 400 km.

die O^{5+} - Ionen mit ihrer niedrigen Gyrofrequenz können dabei mit der vollen Wellenenergie wechselwirken, für die He^{2+} - Ionen und erst recht für die Protonen liegt erheblich weniger Energie vor, so daß es zu einer bevorzugten Heizung des Sauerstoffs kommt.

Zusätzlich wurde in Abbildung 5.29 die Anwachsrate γ der Plasmawellen eingezeichnet. Es sind starke Absorptionslinien der Protonen und der He^{2+} - Ionen zu sehen, die Absorption durch die O^{5+} - Ionen ist nur andeutungsweise zu erkennen. Die Stärke der Absorptionslinien wird dabei maßgeblich durch die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Ionensorten bestimmt.

Es fällt auf, daß sowohl für die Protonen als auch für die He^{2+} - Ionen Werte von $\gamma > \Omega_p$ auftreten. So eine starke Absorption ist mit der Annahme einer scharfen Resonanz $\gamma \rightarrow 0$ in Abschnitt 2.3.2 nicht vereinbar. Allerdings liegt an den betroffenen Frequenzen fast keine Wellenenergie mehr vor, die Welle - Teilchen - Wechselwirkung der Protonen und der He^{2+} - Ionen spielt in dem Modell nur eine völlig untergeordnete Rolle. Daher haben die durch die großen Werte von $|\gamma|$ möglicherweise entstehenden Fehler, wie schon im letzten Abschnitt erwähnt wurde, keinen Einfluß auf die Ergebnisse des numerischen Modells.

Die Stabilität der Verteilungsfunktionen

Eine Verteilungsfunktion ist dann instabil, wenn es Frequenzen bzw. Resonanzgeschwindigkeiten gibt, für die die Anwachsrate γ positive Werte aufweist. Das Vorzeichen von γ hängt dabei

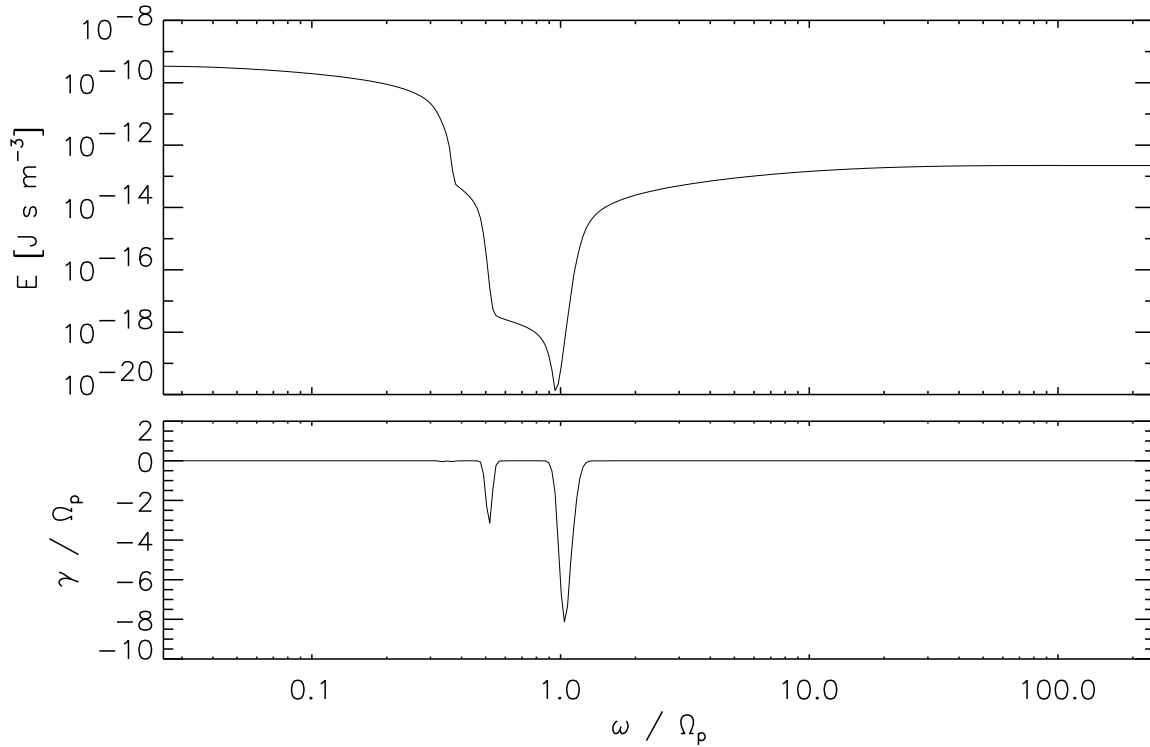


Abbildung 5.29: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 1 015 400 km

von dem Term

$$\left(-\frac{\Omega}{k} F_0(v) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1(v)}{\partial v} \right) \Big|_{v=(\omega-\Omega)/k} \quad (5.7)$$

in der Definition (2.71) der Anwachsrate ab, wobei hier nur das untere Wechselvorzeichen berücksichtigt wird, da aufgrund des kleinen Plasma - β in der Korona $v_{th} \ll v_A$ gilt und folglich nur linkszirkular polarisierte Wellen mit den Ionen in resonante Wechselwirkung treten können.

Unter Ausnutzung der Resonanzbedingung läßt sich dieser Ausdruck umformen in:

$$(v - v_{ph}) F_0(v) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1(v)}{\partial v} \quad (5.8)$$

Da die thermische Geschwindigkeit klein gegenüber der Phasengeschwindigkeit der Wellen ist, ist der erste Summand für alle v im Bereich einiger v_{th} negativ. Auch wenn F_1 stark von einer Maxwellverteilung abweicht, wird es im Bereich kleiner $|v|$ ein Maximum aufweisen. Bei Geschwindigkeiten, die größer als die Geschwindigkeit des Maximums sind, ist $\frac{\partial F_1}{\partial v}$ negativ, so daß auch der Gesamtausdruck negativ ist. Folglich ist stets $\gamma < 0$, es findet eine Absorption der Wellen statt.

Bei negativen v sieht dies anders aus. Es gilt dann $\frac{\partial F_1}{\partial v} > 0$. Doch da $v_{th} \ll v_A$ ist, wird der Gesamtausdruck für die meisten Verteilungen $F_k(v)$ durch den ersten Summanden dominiert, so daß $\gamma < 0$ gilt.

Nur für stark anisotrope $F_k(v)$ kann dies anders sein. Für bi-maxwellverteilte $F_k(v)$ gilt nach der Gaußschen Näherung (2.13): $F_1 = 2V_\perp^2 F_0$, und die Ableitung von F_1 lautet: $\frac{\partial F_1}{\partial v} = -2V_\perp^2$.

$\frac{v-v_D}{V_{\parallel}^2} F_0(v)$. Für $v - v_D \approx -V_{\parallel}$ wird der zweite Summand von (5.8) demnach durch $V_{\parallel} F_0(v)$, multipliziert mit der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$, ersetzt. Für eine hinreichend starke Anisotropie kann sich γ dem Wert Null annähern, die Verteilung erreicht die Grenze der Stabilität.

Diese einfache Überlegung gilt nur für Bi-Maxwellverteilungen, die Auswertung des ursprünglichen Ausdrucks (2.71) für γ liefert die in Abbildung 5.27 gezeigten Ergebnisse.

Ein Vergleich mit der Abbildung 5.26 zeigt, daß die Annäherung von γ/F_0 an die Null für $v - v_D < -1.5V_{\parallel}$ darauf zurückzuführen ist, daß F_0 in diesem Bereich bei positivem $\frac{\partial F_1}{\partial v}$ sehr rasch abfällt. Für größere $v - v_D$ bis zu $v - v_D < V_{\parallel}$ bewegt sich F_0 zwar im Bereich seines Maximums, es gibt aber einen raschen Anstieg von F_1 , der dafür sorgt, daß γ/F_0 kleine Werte behält.

Erst für noch größere $v - v_D$ flacht der Verlauf von F_1 ab, und F_0 behält relativ hohe Werte. In diesem Bereich kommt es zu einem signifikanten Absinken von γ/F_0 , die Absorption der Wellen nimmt deutlich zu.

Die Welle - Teilchen - Wechselwirkung hat demnach im Bereich negativer $v - v_D$ bereits eine Sättigung erreicht oder steht kurz davor. Für positive $v - v_D$ jenseits des Maximums von $F_1(v)$ gibt es dagegen keine Sättigung, der Ausdruck (5.8) ist auch für sehr starke Anisotropien stets negativ, die Wellen werden absorbiert. Auf diese Weise verlagert sich die Position des Maximums von $F_1(v)$ zu immer größeren Werten $v - v_D$ und kann sich weit von der Position $v = v_D$ entfernen, die es für eine Bi-Maxwellverteilung aufweisen müßte. Die reduzierten Verteilungen $F_0(v)$ und besonders $F_1(v)$ in der Abbildung 5.26 weisen genau diesen Verlauf auf. Damit ist auch eine Erklärung für den zunächst überraschenden Anstieg der Temperaturanisotropie gerade bei positiven $v - v_D$ gefunden worden.

Für stark anisotrope Verteilungsfunktionen $F_k(v)$ führt die Welle - Teilchen - Wechselwirkung also zu erheblichen Abweichungen von Maxwell- oder Bi-Maxwellverteilungen. Dennoch ist es interessant, die Stabilität von Bi-Maxwellverteilungen zu untersuchen. Die Instabilitätsbedingung $\gamma > 0$ führt durch Einsetzen bi-maxwellverteilter $F_k(v)$ in (5.8) zu:

$$(v - v_{ph}) F_0(v) - \frac{V_{\perp}^2}{V_{\parallel}^2} (v - v_D) F_0(v) > 0$$

Da stets $F_0(v) > 0$ gilt, kann F_0 aus der Ungleichung herausgekürzt werden. Für eine Anisotropie $T_{\perp} > T_{\parallel}$ ergibt sich hieraus unter Berücksichtigung von $\frac{V_{\perp}^2}{V_{\parallel}^2} = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$:

$$v < -(v_{ph} - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} v_D) \cdot \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right)^{-1} \quad (5.9)$$

Daraus folgt, daß es selbst für kleine Temperaturanisotropien stets Geschwindigkeiten v gibt, für die die Verteilungsfunktion instabil wird. Allerdings berücksichtigt diese Überlegung nicht, daß die instabilen v Werte von etlichen thermischen Geschwindigkeiten aufweisen können, so daß es praktisch keine Teilchen mit dieser Geschwindigkeit gibt, die mit den Wellen resonant in Wechselwirkung treten könnten.

Um abzuschätzen, für welche Werte der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$ die Instabilität signifikant wird, wird der Wertebereich der v auf $-V_{\parallel} < v$ beschränkt. Einsetzen dieser Ungleichung in 5.9

ergibt unter Berücksichtigung von $v_{ph} - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} v_D \approx v_A$:

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1 + \frac{v_A}{V_{\parallel}} \quad (5.10)$$

Mit den in einer Höhe von rund 10^6 km vorliegenden Zahlenwerten $V_{\parallel} = 58$ km/s und $v_A = 1670$ km/s wird die Grenze der Stabilität für $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 29.8$ erreicht. Ein Vergleich mit der lokalen Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ nach Abbildung 5.26 zeigt, daß die Werte in derselben Größenordnung liegen. Allerdings ist der Ansatz einer Bi-Maxwellverteilung nur eine sehr grobe Näherung, da die reduzierten Verteilungen $F_k(v)$ erhebliche Abweichungen von einer Bi-Maxwellverteilung aufweisen. Die Analyse des Ausdrucks (5.7) in der Definition (2.71) zeigte, daß die Verteilung im Bereich positiver v stets stabil ist, so daß sich sehr große Anisotropien und Abweichungen speziell von $F_1(v)$ von einer Bi-Maxwellverteilung entwickeln können. Diese Eigenschaften der Welle - Teilchen - Wechselwirkung können unter der Voraussetzung einer Bi-Maxwellverteilung nicht beschrieben werden.

Die Instabilitätsbedingung (5.10) hängt mit T_{\parallel} , T_{\perp} , V_{\parallel} im wesentlichen von den Momenten der Verteilungsfunktion der Ionensorte, deren Stabilität untersucht werden soll, ab. Zusätzlich besteht jedoch auch eine Abhängigkeit von der Alfvéngeschwindigkeit v_A , und damit von einer Eigenschaft des Plasmas als Ganzem, zu dem alle Ionensorten beitragen.

Durch Umformung der Definition

$$\beta = \frac{\sum_j N_j k_B T_j}{B^2/2\mu_0} \quad (5.11)$$

des Plasma - β erhält man $\beta_{\parallel} = \frac{\sum_j N_j m_j V_{\parallel j}^2}{B^2/2\mu_0}$, woraus nach Einführung des Anteils $\hat{\rho}_j = \rho_j/\rho$ der Ionensorte j an der Gesamtmassendichte ρ folgt: $\beta_{\parallel} = \frac{\rho \sum_j \hat{\rho}_j V_{\parallel j}^2}{B^2/2\mu_0} = \frac{2 \sum_j \hat{\rho}_j V_{\parallel j}^2}{v_A^2}$. Auflösen nach v_A und Einsetzen in (5.10) ergibt schließlich:

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_{\parallel}}} \cdot \sqrt{\sum_j \hat{\rho}_j \frac{V_{\parallel j}^2}{V_{\parallel}^2}} \quad (5.12)$$

Je niedriger also das Plasma - β_{\parallel} ist, desto stärkere Anisotropien können sich entwickeln. Für den Fall eines Plasmas mit nur einer Ionensorte ist der Term unter der Wurzel gleich 1, und die Ungleichung (5.12) kann mit den Ergebnissen von Gary et al. (1994) und Gary et al. (1997) verglichen werden. In diesen Arbeiten werden die maximal möglichen Temperaturanisotropien der Ionen in einem Protonen - Elektronen - Plasma sowohl theoretisch als auch durch Analyse von Daten aus der Magnetosheath der Erde in Abhängigkeit des Plasma - β_{\parallel} untersucht.

Die Ergebnisse sind von derselben Struktur wie (5.12), der Parameter β_{\parallel} ist auch dort mit einem Exponenten von rund $-\frac{1}{2}$ versehen. Lediglich für den Faktor vor der Potenz von β_{\parallel} treten Unterschiede auf. Hier ist er gleich $\sqrt{2}$, bei Gary et al. (1994) und Gary et al. (1997) ist er meist kleiner als 1. Doch der Zahlenwert $\sqrt{2}$ in (5.12) ist willkürlich, da er auf einer Einschränkung $-V_{\parallel} < v$ des Wertebereichs der Resonanzgeschwindigkeit v basiert. Diese Einschränkung sollte sicherstellen, daß an der Stelle v noch eine signifikante Zahl $F_0(v)$ von Teilchen für die resonante

Welle - Teilchen - Wechselwirkung zur Verfügung steht. Wenn die Beschränkung von v auf $-2V_{\parallel} < v$ gelockert wird, dann ist der Faktor $\sqrt{2}$ in (5.12) durch einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zu ersetzen.

Gary et al. (1994) und Gary et al. (1997) werteten Daten aus der Magnetosheath der Erde aus und behandelten damit Plasmen, deren β_{\parallel} in der Größenordnung 1 liegt. Doch die dort präsentierten Ergebnisse lassen sich in den Bereich koronaler β_{\parallel} von $10^{-2} - 10^{-3}$ extrapolieren. Es gibt daher eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Messungen von Gary et al. (1994) und Gary et al. (1997) und der Stabilitätsanalyse (5.12). Wie die Untersuchung der reduzierten Verteilungen in Abbildung 5.26 zeigte, ist die zugrundeliegende Annahme von Bi-Maxwellverteilungen aber problematisch und erlaubt allenfalls eine grobe Abschätzung der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$.

5.4 Koronale Modelle bis zu $1R_{\odot}$

Der Versuch einer Fortsetzung des Modells bis in den Sonnenwind zeigte, daß es in größerer Höhe aufgrund der mit abnehmender Dichte schwächer werdenden Coulomb - Stöße zu einer Entkopplung der Temperaturen der bevorzugt geheizten O^{5+} - Ionen und der übrigen Ionen kommt. Da das Modellplasma nicht in der Lage ist, für einen Temperatenausgleich zu sorgen, wächst die Temperatur des Sauerstoffs praktisch unbegrenzt, so daß kein stationärer Endzustand erreicht werden kann.

Dieser Effekt zeigte sich schon bei der Simulation, die sich bis in eine Höhe von $4 \cdot 10^5$ km erstreckte. Dort wuchs $T_{O^{5+},\perp}$ zum oberen Rand des Rechenfeldes immer mehr an, die Rechnung fand aber einen stationären Endzustand.

Bei allen bisherigen Modellen mit mehreren Ionensorten wurde neben Protonen und He^{2+} nur O^{5+} als Repräsentant schwerer Ionen berücksichtigt. Das koronale Plasma enthält jedoch verschiedene Ionisationsstufen zahlreicher schwerer Elemente, die zueinander in Konkurrenz um die Wellenenergie stehen. In Cranmer (2000) wird der Effekt von mehr als 2000 verschiedenen Ionensorten diskutiert.

Da die Coulomb - Stoßfrequenz ν nach (3.35) eine starke Abhängigkeit von der Ladung und der Masse der Stoßpartner aufweist, können die Coulomb - Stöße für schwere, hoch ionisierte Teilchen trotz geringerer Häufigkeit effektiver sein als für leichtere Ionen. Daher ist es von Interesse, verschiedene schwere Ionensorten im Modellplasma zu untersuchen. Allerdings wird der numerische Aufwand bei der Lösung der Vlasov - Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungen $F_{j,k}(v)$ durch die Berechnung der Coulomb - Stöße dominiert, so daß der Rechenaufwand quadratisch mit der Zahl der Ionensorten ansteigt. Da die Simulationen mit drei Ionensorten bereits einige Tage auf einer Alpha EV6 - Workstation laufen, ist es nicht möglich, Rechnungen mit zahlreichen Ionensorten durchzuführen.

Um den Effekt der Ionenmasse und -ladung auf das Modellplasma zu untersuchen, werden Modellrechnungen zuerst mit O^{5+} und anschließend Fe^{13+} als schwerer Ionensorte durchgeführt. Anschließend wird eine Rechnung vorgestellt, die sowohl Sauerstoff als auch Eisen als schwere Ionen berücksichtigt. Aufgrund der schon erwähnten Probleme bei einer Ausdehnung des Modells bis in den Sonnenwind beschränkt sich das Rechenfeld auf eine Höhe von einem Sonnenradius oberhalb der Übergangszone. Damit ist es immer noch deutlich größer als bei der

stabilen Rechnung bis zu $h = 4 \cdot 10^5$ km, aber es ist zu erwarten, daß die Unterschiede zwischen verschiedenen Sorten schwerer Ionen gerade in Höhenbereichen, in denen das Plasma nicht mehr stoßdominiert ist, deutlich werden.

5.4.1 Rechnung mit Protonen, He^{2+} und O^{5+}

Bei der ersten Simulationsrechnung wird dasselbe aus Protonen, He^{2+} - und O^{5+} - Ionen bestehende Modellplasma wie bei den vorhergehenden Modellen verwendet. Es stellt sich heraus, daß die Rechnung genau wie das sich in den Sonnenwind erstreckende Modell numerisch instabil ist, sie läuft nur über $t = 10^4$ s Simulationszeit, dies entspricht 1.6 Transitzeiten T_t nach (4.6).

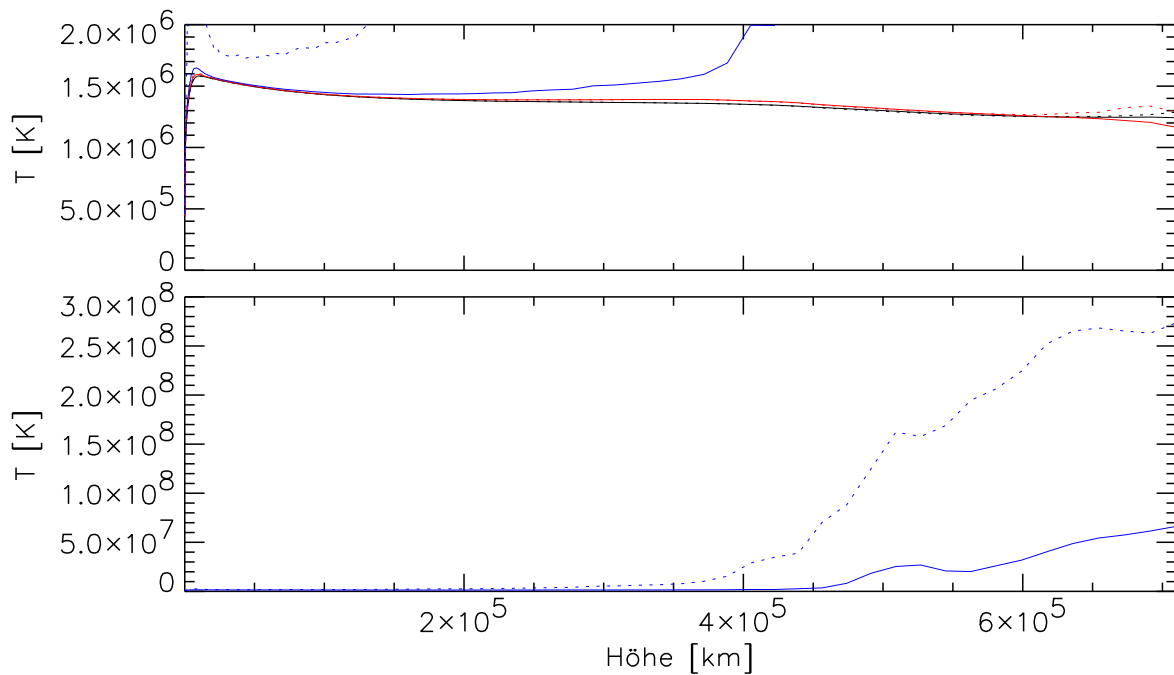


Abbildung 5.30: Temperaturprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot) und O^{5+} (blau). Dargestellt sind die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien).

Der Plot der Höhenprofile der Temperatur nach einer Simulationszeit $t = 8000$ s in Abbildung 5.30 zeigt die schon von der Simulation bis in eine Höhe von $4 \cdot 10^5$ km bekannte Entkopplung von $T_{\text{O}^{5+},\perp}$ von den übrigen Temperaturen. Es werden extreme Werte bis zu $2.5 \cdot 10^8$ K erreicht. Die im Vergleich zu dem sich in den Sonnenwind erstreckenden Modell nach Abbildung 5.25 höheren Werte sind auf die längere Simulationszeit zurückzuführen, über die eine praktisch unbegrenzte Heizung des Sauerstoffs stattfinden konnte.

Auch hier steigt die parallele Temperatur des Sauerstoffs in größerer Höhe auf Werte von einigen 10^7 K an. Diese auf den Diffusionsterm des Welle - Teilchen - Operators (2.49) zurückzuführende Erscheinung wurde schon im letzten Abschnitt diskutiert. Es entwickelt sich dennoch eine starke Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \gg 1$.

Die Abbildung 5.30 zeigt in ihrem oberen Teil den Bereich niedrigerer Temperaturen. Die parallelen und senkrechten Temperaturen der Protonen und He^{2+} - Ionen weisen wie bei früheren

Simulationsrechnungen sehr ähnliche Werte auf, die sich mit $1.5 \cdot 10^6$ K im Bereich der Anfangs- und Randwerte bewegen. Eine Heizung dieser Ionensorten durch die Welle - Teilchen - Wechselwirkung ist nicht zu erkennen. Im unteren Teil des Rechenfeldes zeigt der Plot auch $T_{O^{5+},\parallel}$, doch ab einer Höhe von $4 \cdot 10^5$ km setzt ein rascher Anstieg auf die schon erwähnten Werte der Größenordnung 10^7 K ein.

Insgesamt zeigen die Höhenprofile der Temperaturen die schon aus vorhergehenden Rechnungen bekannten Eigenschaften. Der bereits in einer Höhe knapp über $4 \cdot 10^5$ km einsetzende extreme Anstieg von $T_{O^{5+},\perp}$ und anschließend auch $T_{O^{5+},\parallel}$ deutet darauf hin, daß die Simulationsrechnung bis in eine Höhe von $h = 4 \cdot 10^5$ km schon nahe an der Grenze, bis zu der eine stationäre Lösung der Vlasov - Gleichung (2.32) gefunden werden kann, liegt.

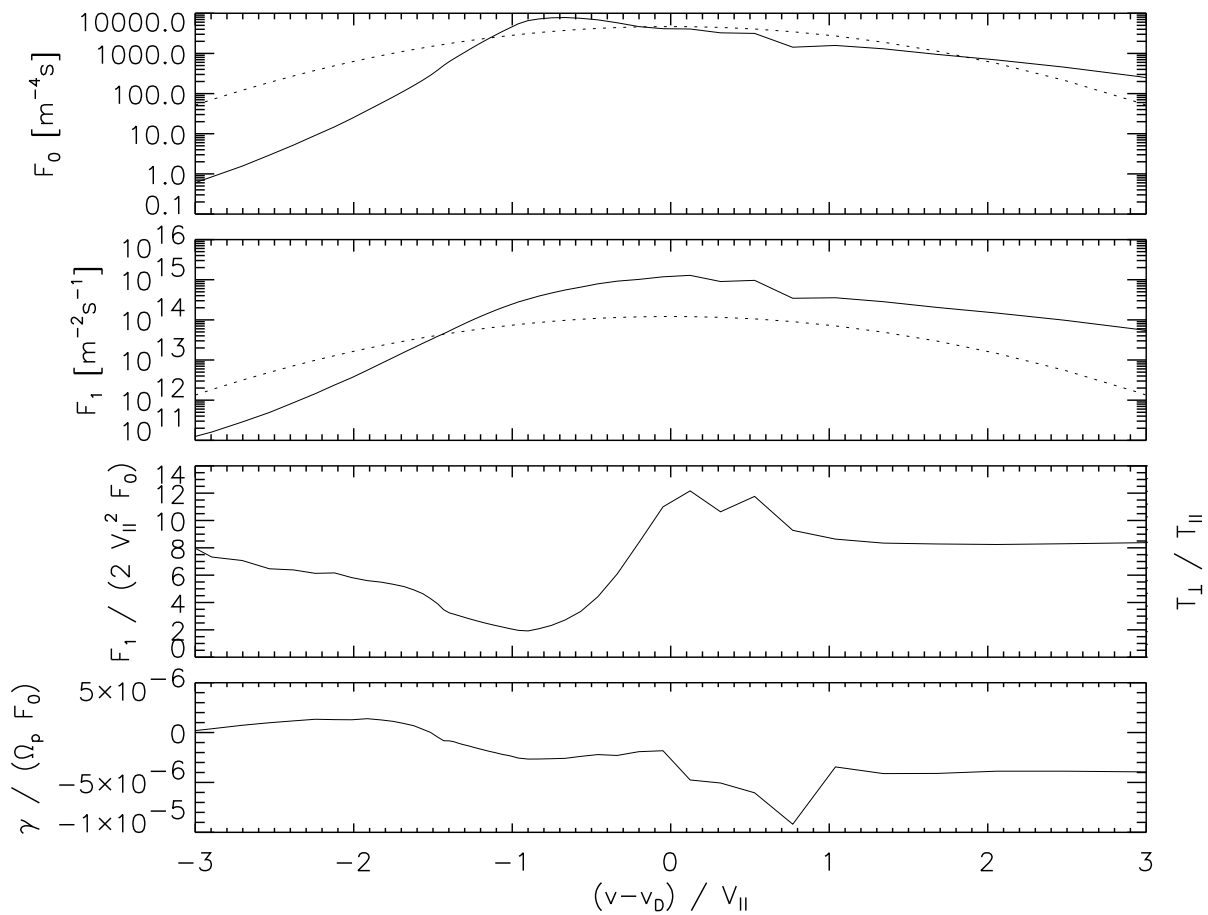


Abbildung 5.31: Reduzierte Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an. Zusätzlich ist die Anwachsrate γ der Wellen nach (2.71), normiert auf die Protonengyrofrequenz Ω_p und die reduzierte Verteilungsfunktion F_0 , dargestellt.

Die in Abbildung 5.31 dargestellten reduzierten Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von rund $5 \cdot 10^5$ km weisen eine große Ähnlichkeit mit denen des sich in den Sonnenwind erstreckenden Modells in $1 \cdot 10^6$ km Höhe nach Abbildung 5.26 auf. $F_0(v)$ weist ein sehr breites, nach positiven v ausgedehntes Maximum auf, während der Maximalwert von $F_1(v)$ erst bei positiven v auftritt. Die Verschiebung der Maxima gegeneinander führt zu einer starken Zunahme

der Temperaturanisotropie im Bereich $v = 0$. Für negative v sinkt $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(s)$ zunächst von 8 auf ein Minimum von 2 an der Stelle $v = -V_{\parallel}$, um dann rasch auf Werte von etwa 10 anzusteigen.

Der Plot der Anwachsrate γ , der nicht nur auf die Gyrofrequenz Ω_p , sondern auch mit Hilfe von $F_0(v)$ auf die Zahl der resonanten Teilchen normiert ist, trägt zur Erklärung dieses Verhaltens bei. Im Bereich negativer v liegt γ bei Null, wobei die schwach positiven Werte aufgrund sehr niedriger Werte von F_0 zu keinem signifikanten Anwachsen der Wellen führen können. Erst für $v > -1.5 V_{\parallel}$ entfernt sich γ von der Null und nimmt negative Werte an, die Wellen werden absorbiert.

Bei der Diskussion der Stabilität von Verteilungsfunktionen im letzten Abschnitt wurde festgestellt, daß das Vorzeichen von γ in dem hier vorliegenden Fall $v_A \gg V_{\parallel}$ im wesentlichen durch den Term (5.8) bestimmt wird. Für positive v jenseits des Maximums von $F_1(v)$ ist die Verteilung stets stabil, die Wellen werden absorbiert. Für negative v kann jedoch ein Vorzeichenwechsel auftreten, bei einer durch die Welle - Teilchen - Wechselwirkung im Laufe der Zeit zunehmenden Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ wird die Grenze der Stabilität erreicht.

Sowohl der Verlauf von γ als auch der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ in Abbildung 5.31 kann durch diesen Effekt erklärt werden. Bei negativen v ist die Stabilitätsgrenze erreicht, bei positiven v findet die Absorption der Wellen durch die Teilchen weiterhin statt. Da die Welle - Teilchen - Wechselwirkung bevorzugt $F_1(v)$ heizt, baut sich in diesem Bereich eine immer größere Temperaturanisotropie auf, die zu einer Verlagerung des Maximums von $F_1(v)$ zu höheren Geschwindigkeiten führt.

Die Plots in Abbildung 5.31 weisen kleine Unstetigkeiten und Oszillationen besonders bei der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ und der Anwachsrate γ auf. Hierfür verantwortlich sind kleine Störungen der Verteilungsfunktionen F_k als Funktion von v . Ferner sind beim Höhenprofil von $T_{O^{5+},\perp}$ leichte Oszillationen zu erkennen. Die Ursache dafür liegt in der sich abzeichnenden numerischen Instabilität, die schließlich zum Abbruch der Rechnung führt. Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt, entwickeln sich die Verteilungen $F_k(v)$ in einer gegebenen Höhe auf einer wesentlich kürzeren Zeitskala, so daß die hier vorgestellten Ergebnisse durch die das Rechenfeld als Ganzes betreffende Instabilität nicht beeinträchtigt werden.

Die Rekonstruktion der zweidimensionalen Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ in einer Höhe von $5 \cdot 10^5$ km nach (5.6) in Abbildung 5.32 weist die schon früher gefundenen Charakteristika auf. Die starke Temperaturanisotropie ist als Ausdehnung der Verteilungsfunktion in v_{\perp} - Richtung zu erkennen. Auf der der Sonne zugewandten Seite, d.h. $v_{\parallel} < 0$, ist der Gradient von f deutlich steiler als auf der von der Sonne abgewandten Seite.

Dort hat sich sogar ein lokales Maximum von $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ gebildet, es liegt also ein richtiger Beam vor. Seine Position ist ungefähr $1.5 V_{\parallel}$ vom Hauptmaximum der Verteilung entfernt. Da die Alfvéngeschwindigkeit mit $v_A = 1669$ km/s groß gegenüber den thermischen Geschwindigkeiten $V_{\parallel} = 57.9$ km/s und $V_{\perp} = 242$ km/s ist, ist auch diese Geschwindigkeitsdifferenz noch klein gegenüber v_A . Unter der Wirkung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung hat sich eine kleine Teilchenpopulation gebildet, die mit höherer Geschwindigkeit als der Hauptteil der O^{5+} - Ionen nach außen strömt. Damit ist das hier vorgestellte Modell in der Lage, die Entwicklung von Beam - Verteilungen, wie sie von Marsch et al. (1982) im Sonnenwind beobachtet wurden, aus einer isotropen Maxwellverteilung heraus nachzuvollziehen.

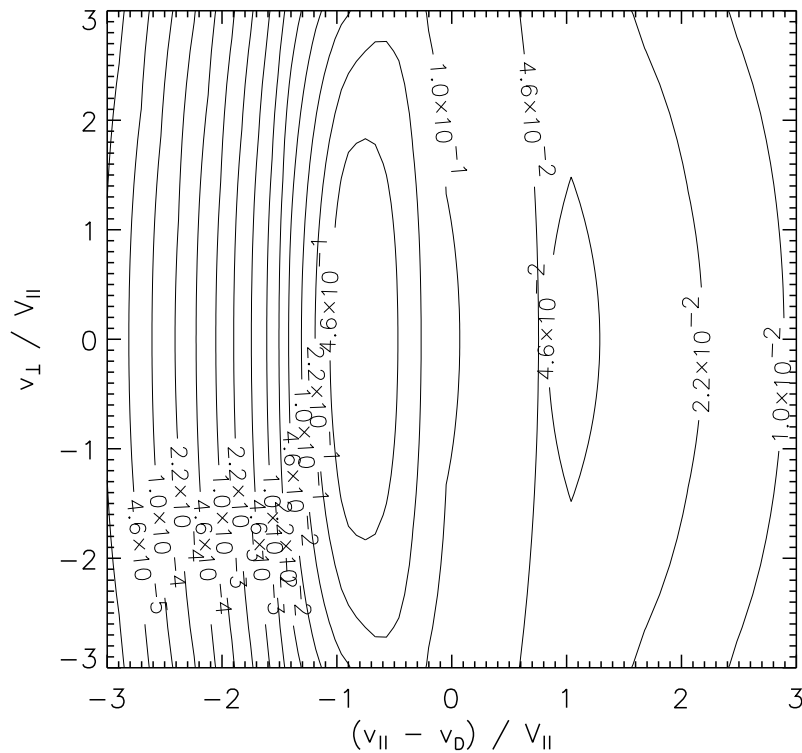


Abbildung 5.32: Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 509 190 km.

Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von $5 \cdot 10^5$ km nach Abbildung 5.33 zeigt das schon bekannte Bild mit den Absorptionslinien der drei Ionensorten. Es ist zu erkennen, daß nur die O^{5+} - Ionen mit ihrer niedrigen Gyrofrequenz mit der vollen Wellenenergie in Wechselwirkung treten können, so daß sie bevorzugt geheizt werden. Für die übrigen Ionensorten bleibt nur ein kleiner Bruchteil der ursprünglichen Energie übrig. Daher sind die bei den Protonen und He^{2+} - Ionen auftretenden großen Werte von γ trotz der Annahme einer scharfen Resonanz bei der Berechnung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung unproblematisch, ihr Einfluß auf das Ergebnis ist vernachlässigbar.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das Modell bis in eine Höhe von $1R_{\odot}$ die Ergebnisse der Rechnungen bis $4 \cdot 10^5$ km und über $3R_{\odot}$ reproduziert. Es kommt schon in einer relativ niedrigen Höhe von etwas mehr als $4 \cdot 10^5$ km zu einer Entkopplung der Temperaturen des Sauerstoffs und der übrigen Ionen, der zu einem unbegrenzten Wachstum von $T_{O^{5+}, \perp}$ und schließlich zum Abbruch der Rechnung führt. Die reduzierten Verteilungsfunktionen des Sauerstoffs sind durch eine starke, aber von der Resonanzgeschwindigkeit v abhängige Temperaturanisotropie gekennzeichnet, die sich mit Hilfe der Abhängigkeit der Anwachsrate γ von den $F_k(v)$ erklären läßt.

5.4.2 Rechnung mit Protonen, He^{2+} und Fe^{13+}

Die Simulation in einem Rechenfeld der Höhe $1R_{\odot}$ wird nun wiederholt, wobei die O^{5+} - Ionen durch Fe^{13+} - Ionen ersetzt werden. Die Häufigkeiten der Ionen bleiben unverändert, für He^{2+}

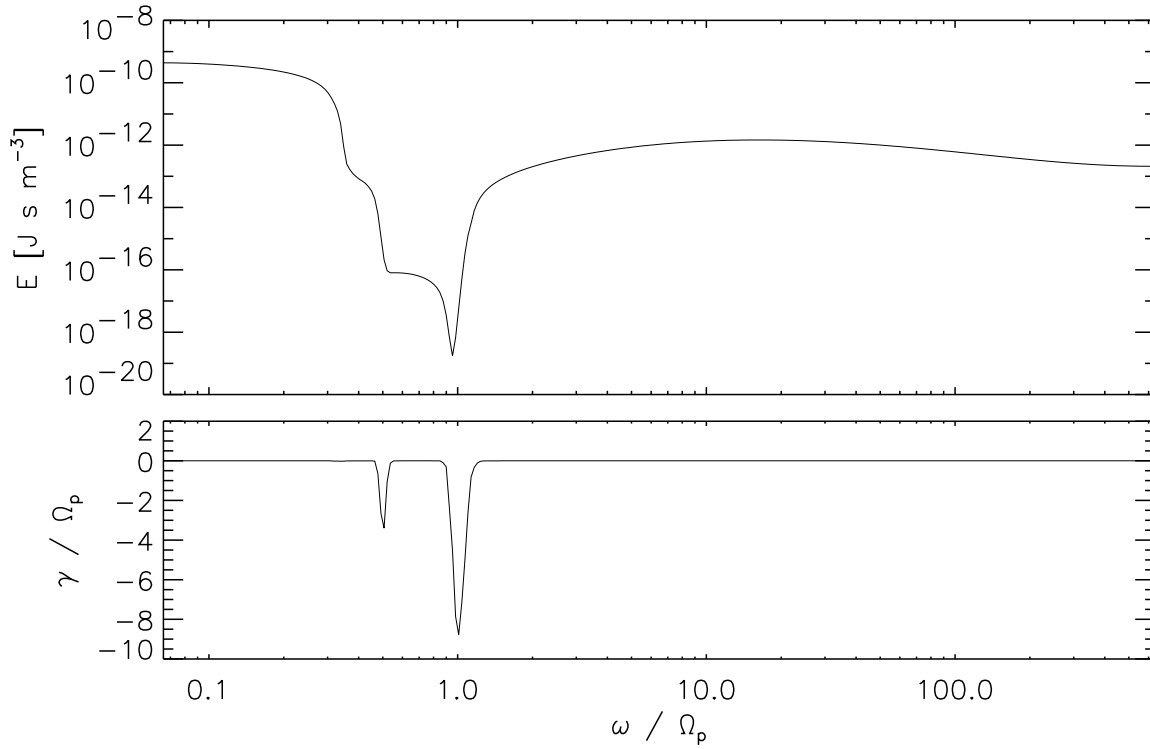


Abbildung 5.33: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 509 190 km

betragen sie 0.1 und für Fe^{13+} 0.001 Protonendichten am unteren Rand.

Da die Coulomb – Stöße auf der elektrostatischen Abstoßung der Ionen basieren, weisen sie eine starke Ladungsabhängigkeit auf. Ihre Geschwindigkeitsabhängigkeit führt über die thermische Geschwindigkeit $v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ zu einer Abhängigkeit von den Massen der Stoßpartner. Die klassische Coulomb – Stoßfrequenz ν nach (3.35) ergibt für die Stöße der schweren Ionen an Protonen eine Beziehung der Form

$$\nu \propto \frac{q^2}{m} \quad (5.13)$$

von der Ionenmasse m und -ladung q . Daraus folgt, daß die Fe^{13+} - Ionen eine um einen Faktor 1.9 höhere Stoßfrequenz aufweisen als O^{5+} .

Für die Stöße der Protonen an den schweren Ionen ergibt sich nach (3.35) für gleiche Ionen-temperaturen eine Abhängigkeit der Form

$$\nu \propto q^2 m^{3/2} \quad (5.14)$$

Demnach werden die Protonen um einen Faktor 44.3 effektiver an Fe^{13+} - Ionen gestreut als an O^{5+} .

Der durch Coulomb – Stöße verursachte Energietransfer zwischen den schweren und den leichten Ionen ist also umso stärker, je höher die Massen und die Ladungszahlen der Ionen sind. Da die in den vorherigen Simulationen aufgetretene Entkopplung zwischen $T_{\text{O}^{5+}, \perp}$ und den übrigen Temperaturen auf zu schwache Coulomb – Stöße zurückzuführen war, ist es von Interesse, die O^{5+} - Ionen durch Fe^{13+} zu ersetzen und die Auswirkung auf das Simulationsergebnis zu

untersuchen. Dabei bleibt die Dichte der schweren Ionen unverändert, auch wenn dies nicht den Ionenhäufigkeiten in der Korona entspricht.

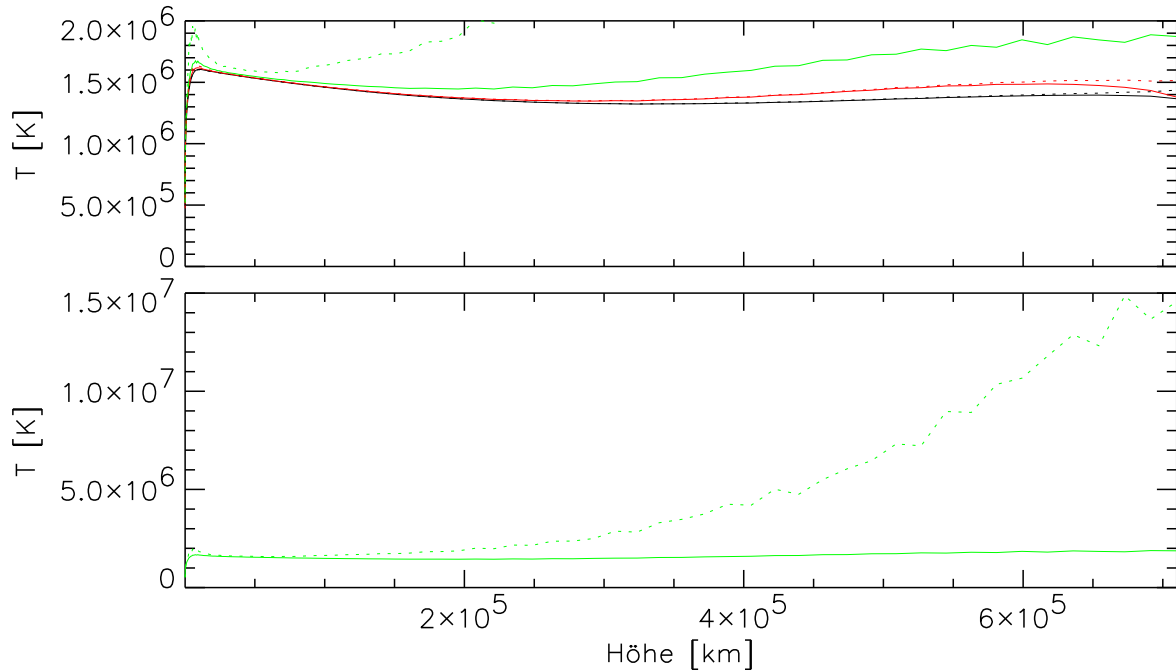


Abbildung 5.34: Temperaturprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot) und Fe^{13+} (grün). Dargestellt sind die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien).

Die Abbildung 5.34 stellt die so gewonnenen Temperaturprofile nach einer Simulationszeit $t = 3 \cdot 10^4$ s dar. Dies entspricht 4.7 Transitzeiten T_t nach (4.6). Im Gegensatz zur vorhergehenden Simulation konvergiert die Rechnung nun in einen stationären Endzustand, der für die schweren Ionen aufgrund ihrer Masse und damit niedrigen thermischen Geschwindigkeit aber noch nicht ganz erreicht ist. Da die Wirkung der numerischen Instabilität auf die Verteilungsfunktionen in den früheren Rechnungen vernachlässigbar war, gilt dies erst recht für das Nichterreichen des Grenzzustands. Es ist auch festzustellen, daß im Laufe der Simulationszeit ab $t = 2 \cdot 10^4$ s keine signifikante Änderung der Temperaturprofile mehr auftritt.

Daher steht der Auswertung der Simulationsergebnisse nichts im Weg. Auch die Temperaturprofile in Abbildung 5.34 zeigen eine Entkopplung von $T_{\text{Fe}^{13+}, \perp}$ und den übrigen Temperaturen. $T_{\text{Fe}^{13+}, \parallel}$ steigt im oberen Bereich des Rechenfeldes nur leicht an. Die senkrechte Temperatur des Eisens erreicht mit $1.5 \cdot 10^7$ K zwar hohe, aber längst nicht so extreme Werte wie O^{5+} in der vorherigen Rechnung. Die Temperaturverläufe der Ionen ähneln denen des Modells bis in eine Höhe von $4 \cdot 10^5$ km nach Abbildung 5.21.

Doch die Entkopplung tritt jetzt in einer größeren Höhe und damit in einem weniger dichten Plasma auf. Die Ursache hierfür sind die stärkeren Coulomb – Stöße der Fe^{13+} - Ionen, die auch in einem dünneren Plasma für Stoßdominanz sorgen. In einer Höhe von rund $5 \cdot 10^5$ km beträgt die Coulomb – Stoßfrequenz der Eisenionen an den Protonen $\nu = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. Im Vergleich dazu beträgt die der Welle - Teilchen – Wechselwirkung zugeordnete Stoßfrequenz nur $\frac{1}{\tau} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Das Plasma ist damit stoßdominiert, ν ist um einen Faktor 25 größer als $\frac{1}{\tau}$. Bei einem Modell mit O^{5+} - Ionen war ν dagegen in einer Höhe von $3 \cdot 10^5$ km nur um einen Faktor 8 größer

als $\frac{1}{\tau}$. Die Ersetzung des O^{5+} durch das schwerere und höher ionisierte Fe^{13+} führt durch die stärkeren Coulomb – Stöße zu einer Erhöhung der Stoßdominanz trotz der größeren Höhe und damit niedrigeren Teilchendichte, so daß sich dort eine weniger starke Temperaturanisotropie entwickeln kann. Dies ist in der Abbildung 5.34 zu erkennen, die Anisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$ ist deutlich kleiner als in Abbildung 5.21 oder 5.25.

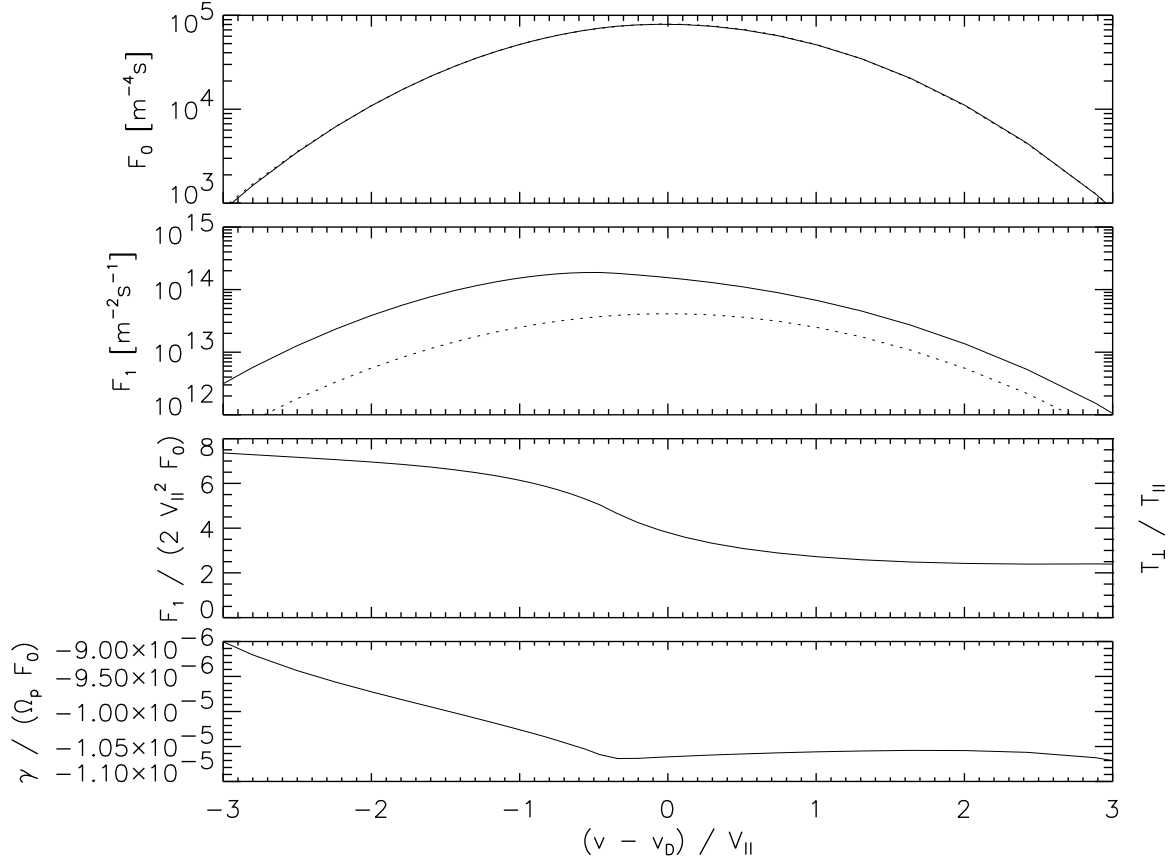


Abbildung 5.35: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Fe^{13+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an. Zusätzlich ist die Anwachsrate γ der Wellen nach (2.71), normiert auf die Protonengyrofrequenz Ω_p und die reduzierte Verteilungsfunktion F_0 , dargestellt.

Die Abbildung 5.35 zeigt die reduzierten Verteilungen der Fe^{13+} - Ionen in einer Höhe von $5 \cdot 10^5$ km. Aufgrund der stärkeren Coulomb – Stöße sind die Abweichungen von einer Maxwellverteilung deutlich geringer als bei der Verteilung der O^{5+} - Ionen in derselben Höhe nach Abbildung 5.31. Der Verlauf von $F_0(v)$ ist so gut wie identisch mit dem der Maxwellverteilung. $F_1(v)$ ist durch die Temperaturanisotropie für alle v erhöht, doch wie schon bei der Diskussion der Temperaturprofile festgestellt wurde, ist die Anisotropie wesentlich schwächer als beim O^{5+} .

Auch der Verlauf der Anisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ unterscheidet sich grundlegend von der des O^{5+} . Dort traten die höchsten Anisotropien im Bereich kleiner positiver v auf. Doch hier werden die höchsten Werte von 8 im Bereich negativer v erreicht, die Anisotropie fällt mit wachsendem v monoton auf Werte von knapp über 2. Dieses Verhalten ähnelt dem der Anisotropie der O^{5+} - Ionen in geringer Höhe im Rechenfeld nach Abbildung 5.19.

Der Anstieg der Anisotropie des Sauerstoffs nach Abbildung 5.31 war auf den Term (5.8) in der Definition der Anwachsrate γ zurückzuführen, der im Bereich negativer v für starke Temperaturanisotropien zu $\gamma = 0$ oder sogar positiven γ führen kann und die Absorption der Wellen durch die betreffenden Teilchen stoppt. Für positive v gilt dagegen stets $\gamma < 0$, die Wellen geben ihre Energie an die Teilchen ab, und die Temperaturanisotropie kann weiter wachsen.

Doch hier werden keine starken Temperaturanisotropien erreicht, so daß die Welle - Teilchen - Wechselwirkung für alle v zu einer Heizung der Teilchen führen kann. Der Plot der Anwachsrate γ in Abbildung 5.35 bestätigt dies. Über alle v ändert sich γ nur um 20%, die Wellen werden stets absorbiert. Die stärkere Anisotropie im Bereich negativer v macht sich nur durch eine leichte Abnahme des Betrags von γ bemerkbar. Doch da die Teilchen mit negativen Geschwindigkeiten besonders niedrige Resonanzfrequenzen aufweisen, treten sie bevorzugt mit der vollen Wellenenergie in Wechselwirkung, so daß sie bevorzugt geheizt werden. Dadurch kann die mit zunehmender negativer Geschwindigkeit anwachsende Temperaturanisotropie erklärt werden.

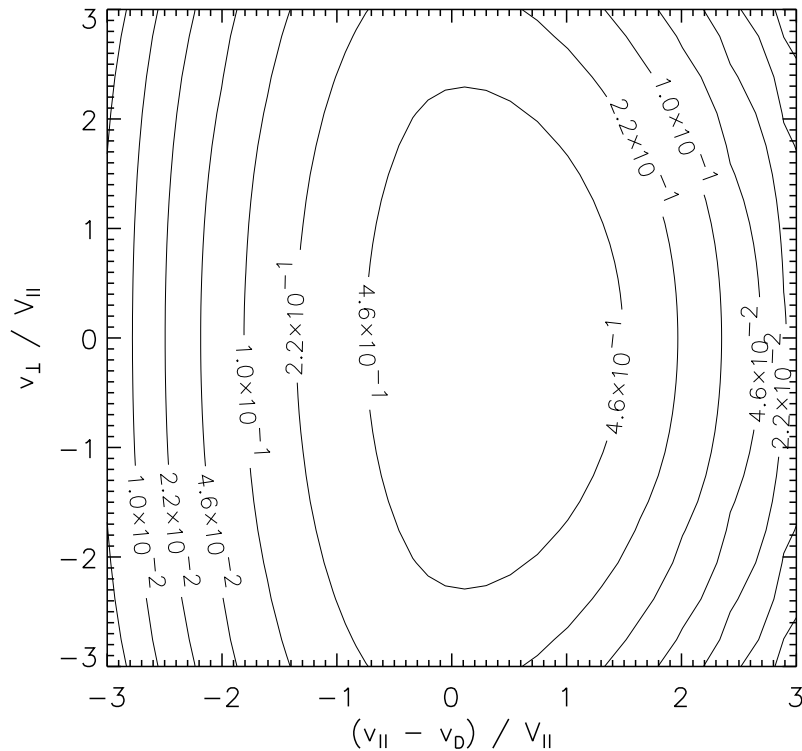


Abbildung 5.36: Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Eisens in einer Höhe von 509 190 km.

Die Abbildung 5.36 zeigt die mit Hilfe von (5.6) rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Eisens in der Höhe von $5 \cdot 10^5$ km. Auffallend ist die Ähnlichkeit zu einer Bi-Maxwellverteilung. Die Temperaturanisotropie wird als längliche Verformung der Isolinien deutlich, doch die von allen früheren Darstellungen der Verteilung $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs bekannte Verformung mit einem raschen Abfall im Bereich negativer v_{\parallel} , d.h. auf der der Sonne zugewandten Seite, und einem langsameren Rückgang bei positiven v_{\parallel} ist nur schwach ausgeprägt.

Die Ähnlichkeit mit einer Bi-Maxwellverteilung wird schon anhand des Verlaufs von $F_1(v)$ und der Temperaturanisotropie $\frac{T_\perp}{T_\parallel}(v)$ in Abbildung 5.35 deutlich. Die Anisotropie ist mit Werten zwischen 8 und 2 stets größer als 1. Im Bereich $-V_\parallel < v < V_\parallel$ liegt sie sogar nur zwischen 6 und 3 und ändert sich damit lediglich um einen Faktor 2. Dieser Faktor führt zu der beobachtbaren Abweichung der Verteilung $f(v_\parallel, v_\perp)$ von einer Bi-Maxwellverteilung.

Die annähernd bi-Maxwellsche Verteilung deutet darauf hin, daß die Zeitskala, auf der die Coulomb – Stöße die Form von $F_0(v)$ und $F_1(v)$ jeweils einer Maxwellverteilung angleichen, kürzer ist als die, auf der sie einen Ausgleich zwischen T_\parallel und T_\perp herbeiführen. Durch die bevorzugte Heizung von $F_1(v)$ entsteht so eine annähernd bi-Maxwellsche Verteilung $f(v_\parallel, v_\perp)$ mit $T_\perp > T_\parallel$.

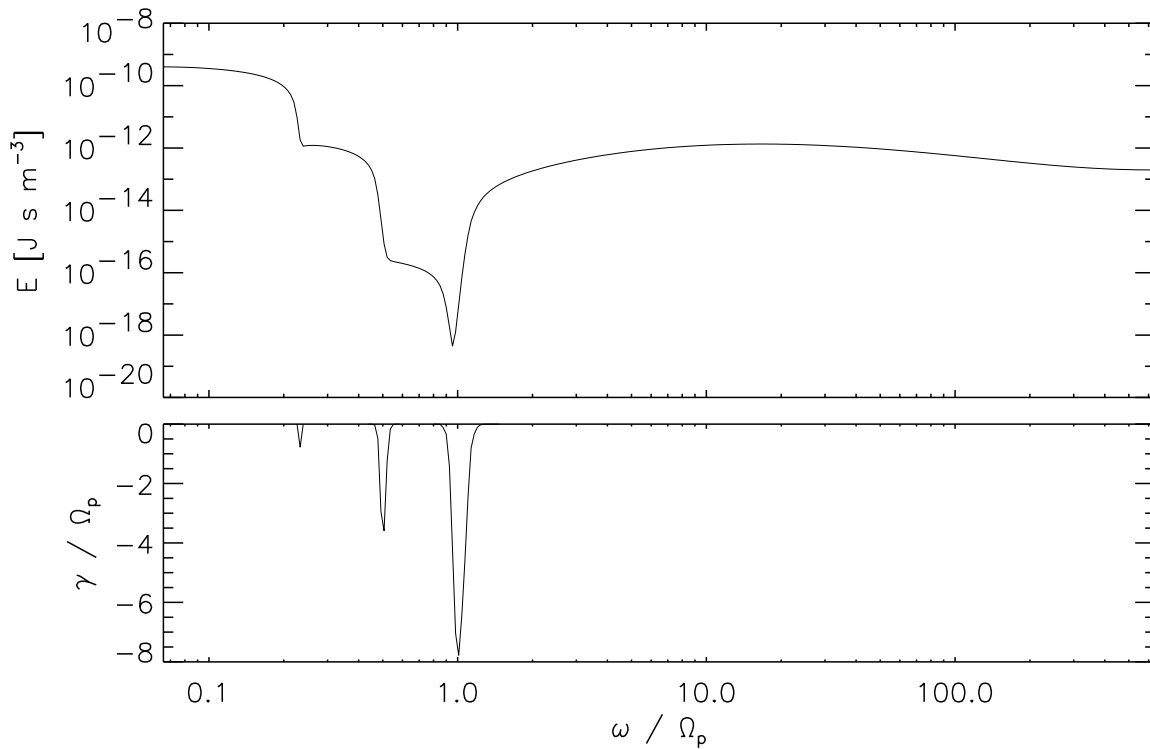


Abbildung 5.37: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 509 190 km

Das in Abbildung 5.37 gezeigte Spektrum der Plasmawellen zeigt erneut die Absorptionslinien der drei Ionensorten und die bevorzugte Heizung des Eisenionen. Im Unterschied zu dem Spektrum des Modells mit O^{5+} nach Abbildung 5.33 ist die Gyrofrequenz der schweren Ionen auf $\Omega_{Fe^{13+}} = 0.23 \cdot \Omega_p$ im Vergleich zu $\Omega_{O^{5+}} = 0.31 \cdot \Omega_p$ abgesunken. Dementsprechend hat sich der Frequenzabstand zwischen der Absorption durch die schweren Ionen und durch die leichteren Ionen etwas vergrößert.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse des Modells mit Fe^{13+} anstelle von O^{5+} eine starke Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Ionensorte. Durch die unterschiedlich starken Coulomb – Stöße ist der Energieaustausch zwischen den schweren und den leichten Ionen nach (5.13) und (5.14) eine Funktion der Ionenmasse und -ladung. Wie diese und die letzte Simulationsrechnung zeigen, wird die Wahl der schweren Ionensorte dadurch zu einer Frage von Stabilität oder Instabilität der numerischen Simulation. Auch zeigen diese Ergebnisse, daß schwere und

hoch ionisierte Elemente trotz ihrer geringeren Häufigkeit gegenüber z.B. dem Sauerstoff einen erheblichen Einfluß auf die Plasmakinematik haben können.

5.4.3 Rechnung mit Protonen, He^{2+} , O^{5+} und Fe^{16+}

Abschließend wird der Effekt mehrerer um die Wellenenergie konkurrierender schwerer Ionensorten auf das Simulationsergebnis untersucht. Da die im letzten Abschnitt verwendeten Fe^{13+} - Ionen mit $\Omega = 0.23 \cdot \Omega_p$ eine deutlich niedrigere Gyrofrequenz aufweisen als O^{5+} mit $\Omega = 0.31 \cdot \Omega_p$, werden sie durch Fe^{16+} - Ionen mit einer Gyrofrequenz von $\Omega = 0.29 \cdot \Omega_p$ ersetzt. Eine zu große Differenz der Gyrofrequenzen der schweren Ionen würde dazu führen, daß die Teilchensorte mit dem niedrigeren Ω den größten Teil der Wellenenergie absorbiert und bevorzugt geheizt wird, während für die andere Ionensorte nur wenig Energie übrig bleibt, wie es in den bisher vorgestellten Simulationen für die He^{2+} - Ionen der Fall war. Nur durch dichter beieinanderliegende Gyrofrequenzen tritt eine echte Konkurrenz um die Wellenenergie auf.

Die Verhältnisse der am unteren Rand vorgegebenen Teilchendichten entsprechen denen der bisherigen Rechnungen mit $\frac{1}{10}$ Protonendichte für He^{2+} und $\frac{1}{1000}$ Protonendichte für O^{5+} . Für die Dichte der Eisenionen wird entsprechend der Dichteverhältnisse der schweren Ionen in der Korona nach Mariska (1992) oder Cranmer (2000) $\frac{1}{6}$ der Dichte des O^{5+} , also $\frac{1}{6000}$ Protonendichte, vorgegeben.

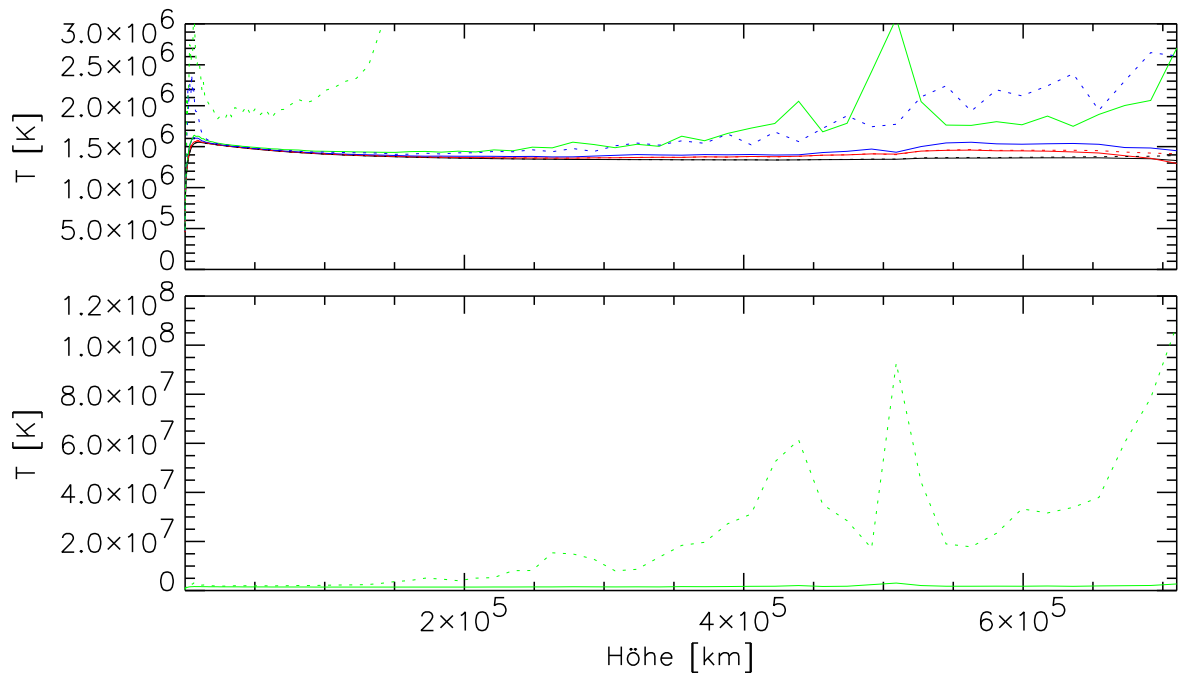


Abbildung 5.38: Temperaturprofile für Protonen (schwarz), He^{2+} (rot), O^{5+} (blau) und Fe^{16+} (grün). Dargestellt sind die Werte für T_{\parallel} (durchgezogene Linien) und T_{\perp} (gestrichelte Linien).

Die Abbildung 5.38 zeigt die Höhenprofile der Temperaturen nach einer Simulationszeit von $t = 10^4$ s, die nicht viel größer ist als die Transitzeit $T_t = 6393$ s ist. Die schweren Ionen mit ihrer niedrigen thermischen Geschwindigkeit sind damit noch weit vom stationären Endzustand entfernt, falls ein solcher überhaupt erreicht werden kann.

Der obere Teil der Abbildung stellt den Bereich niedriger Temperaturen dar, es sind die Höhenprofile der parallelen und senkrechten Temperaturen aller Ionensorten, mit Ausnahme von $T_{Fe^{16+},\perp}$, zu erkennen. Der untere Teil stellt die Temperaturen des Eisens dar.

Bei den schweren Ionen fallen extreme Schwankungen auf. Dennoch lassen sich grundlegende Ergebnisse ableiten. Zunächst ist eine bevorzugte Heizung des Eisens festzustellen. Demnach wird die Ionensorte mit der niedrigsten Gyrofrequenz bevorzugt geheizt, genau wie bei den schweren Ionen in der vergangenen Rechnungen. Trotz des nur geringen Unterschieds der Gyrofrequenzen $\Omega_{Fe^{16+}} = 0.91 \cdot \Omega_{O^{5+}}$ absorbiert das Eisen die meiste Wellenenergie, so daß extrem hohe T_{\perp} und damit verbundene starke Temperaturanisotropien erreicht werden. Da die Dichte der Eisenionen nur $\frac{1}{6}$ der Dichte der schweren Ionen in den bisherigen Modellen beträgt, verteilt sich die absorbierte Energie auf deutlich weniger Teilchen, so daß das Eisen stärker aufgeheizt wird als die schweren Ionen in den bisherigen Modellen. Seine Temperatur kann im Laufe der Simulationszeit unbegrenzt wachsen, wodurch die Konvergenz des numerischen Modells in einen stationären Endzustand verhindert wird. Die damit verbundenen numerischen Probleme zeigen sich in den schon erwähnten Schwankungen.

Doch auch die Temperatur des Sauerstoffs wird durch die Heizung beeinflusst. In der oberen Hälfte des Rechenfeldes ist eine Erhöhung von T_{\perp} des O^{5+} auf Werte von etwa $2.5 \cdot 10^6$ K zu erkennen, während T_{\parallel} sich nicht von den Temperaturen ($\approx 1.5 \cdot 10^6$ K) der leichteren Ionen, für die auch bei dieser Simulation praktisch keine Wellenenergie mehr übrig bleibt, unterscheidet.

Trotz des geringen Unterschiedes der Gyrofrequenzen und ihrer niedrigen Teilchendichte schaffen es die Eisenionen demnach, die meiste Wellenenergie zu absorbieren. Für den Sauerstoff bleibt zwar noch ein geringer Teil der Energie übrig, doch ein Vergleich mit der Abbildung 5.34 der Temperaturprofile eines Modells mit O^{5+} , aber ohne Fe^{16+} zeigt, daß die Heizung signifikant verringert ist.

Die in Abbildung 5.39 dargestellten Plots der reduzierten Verteilungen $F_k(v)$ des Sauerstoffs, der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ und Anwachsrate γ bestätigen diese Beobachtung. Bei $F_0(v)$ ist keine Abweichung von einer Maxwellverteilung zu erkennen. $F_1(v)$ ist im Bereich negativer v , also der Teilchen mit den niedrigsten Resonanzfrequenzen, erhöht. Damit liegt die typische Signatur der Heizung durch Welle - Teilchen - Wechselwirkung vor, die Sauerstoffionen mit den niedrigsten Resonanzfrequenzen treten zuerst mit der Wellenenergie, die von den Eisenionen übrig gelassen wurde, in Wechselwirkung.

Doch die Heizung ist nur schwach, was auch durch den Plot der Temperaturanisotropie als Funktion von v bestätigt wird. Für große negative v erreicht sie Werte von 3 und sinkt mit wachsender Geschwindigkeit ab. Im Bereich großer positiver Geschwindigkeiten ist sie sogar etwas kleiner als 1. Im Vergleich zu den extremen Anisotropien früherer Rechnungen folgt hieraus, daß für die Wechselwirkung mit den Sauerstoffionen nur sehr wenig Wellenenergie vorliegt, die außerdem schon von den O^{5+} - Ionen mit negativer Geschwindigkeit weitgehend absorbiert wird, so daß im Bereich positiver Geschwindigkeiten praktisch keine Heizung mehr zu erkennen ist.

Die mit Hilfe von $F_0(v)$ auf die Zahl der resonanten Teilchen normierte Anwachsrate γ weist als Funktion der Resonanzgeschwindigkeit nur eine geringe Variation von wenigen Prozent auf. Auch dies ist eine Folge der geringen Abweichungen der $F_k(v)$ von einer Maxwellverteilung. Im Bereich negativer v ist die Temperaturanisotropie viel zu schwach, um die bei früheren

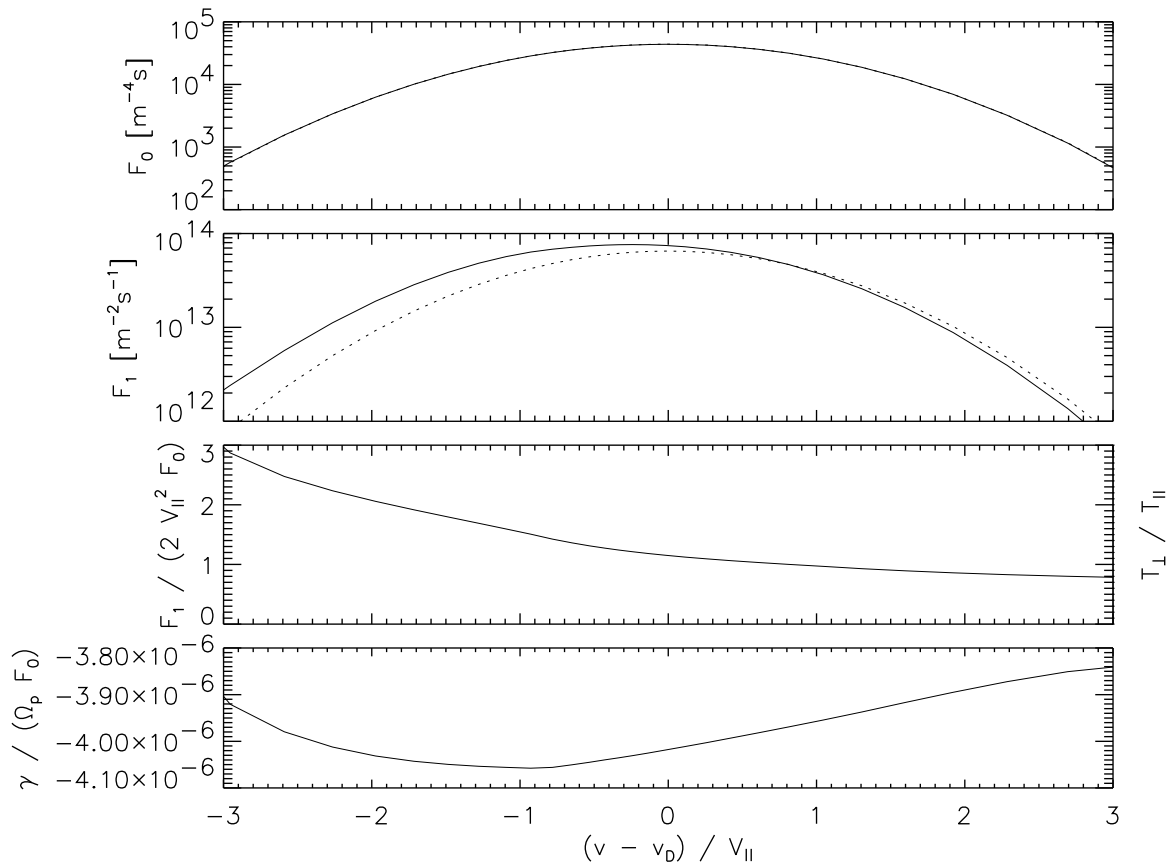


Abbildung 5.39: Reduzierte Verteilungsfunktionen der O^{5+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an. Zusätzlich ist die Anwachsrate γ der Wellen nach (2.71), normiert auf die Protonengyrofrequenz Ω_p und die reduzierte Verteilungsfunktion F_0 , dargestellt.

Rechnungen diskutierte “Sättigung” der Welle - Teilchen – Wechselwirkung durch einen Anstieg von γ auf Null oder sogar positive Werte zu erreichen.

Die nur schwache Heizung und die Variation der Temperaturanisotropie macht sich auch in dem Plot der rekonstruierten 2 - dimensionalen Verteilungsfunktion $f(v_{||}, v_{\perp})$ nach Abbildung 5.40 bemerkbar. Es ist eine deutliche Deformation zu erkennen, die genau wie bei früheren Rechnungen zu einem raschen Abfall von $f(v_{||}, v_{\perp})$ auf der der Sonne zugewandten Seite $v_{||} < 0$ und einem langsameren Rückgang auf der Seite $v_{||} > 0$ führt. Die Deformation ist eine Folge der Variabilität der Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{||}}(v_{||})$, die auf der bevorzugten Heizung der Teilchen mit $v_{||} < 0$ beruht.

Abgesehen von der Verformung erscheinen die Isolinien annähernd kreisförmig. Darin zeigen sich die mit der schwachen Heizung verbundenen geringen Werte der Temperaturanisotropie, für eine Maxwellverteilung würden sie konzentrische Kreise bilden. Die Verteilungsfunktion des Sauerstoffs weist damit die Charakteristika der Welle - Teilchen – Wechselwirkung auf, aber durch die niedrige Wellenintensität wird nur eine relativ geringe Wirkung erzielt.

Die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_k(v)$ der Fe^{16+} - Ionen zeigen nach Abbildung 5.41 ein völlig anderes Bild. $F_0(v)$ unterscheidet sich nur geringfügig von einer Maxwellverteilung, aber

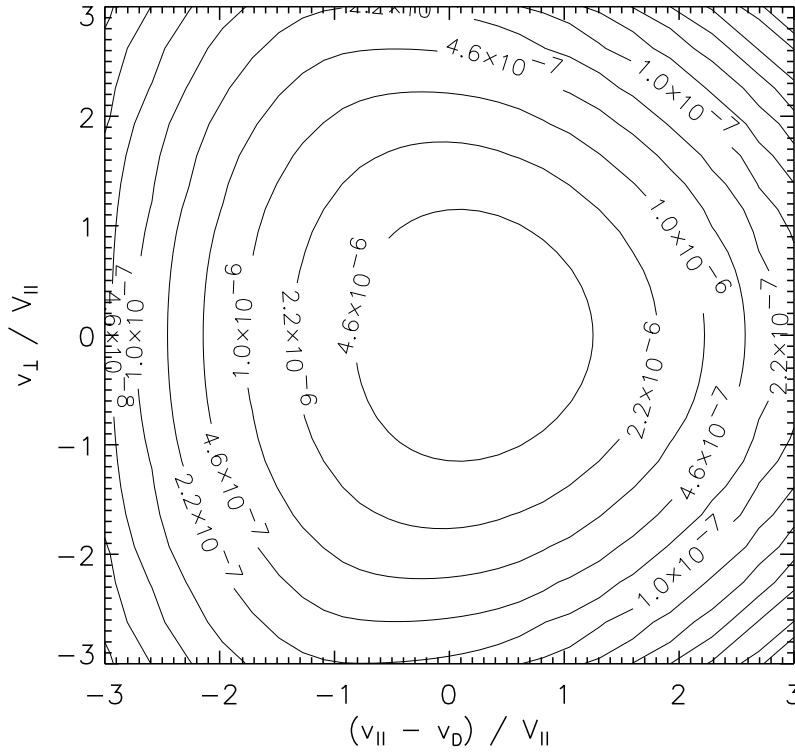


Abbildung 5.40: Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Sauerstoffs in einer Höhe von 509 190 km.

$F_1(v)$ ist durch eine extreme Temperaturanisotropie $T_{\perp} > T_{\parallel}$ gekennzeichnet. Das Bild ist durch eine sehr starke Heizung der Fe^{16+} - Ionen gekennzeichnet und ähnelt den Verteilungen des Sauerstoffs in dem Modell mit Protonen, He^{2+} und O^{5+} nach Abbildung 5.31.

So liegt die Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ für negative v relativ konstant bei 30, um für positive v auf Werte bis zu 60 anzusteigen. Damit ist wieder eine Zunahme der Anisotropie mit der Geschwindigkeit zu beobachten, obwohl die Ionen mit negativer Geschwindigkeit und dadurch verminderter Resonanzfrequenz bevorzugt in Wechselwirkung mit bisher unverbrauchter Wellenenergie treten sollten.

Die Erklärung hierfür wird erneut durch den Plot der Anwachsrate, normiert auf die für die Welle - Teilchen - Wechselwirkung zur Verfügung stehenden Teilchen, geliefert. Die Temperaturanisotropie ist für negative v so groß geworden, daß sich der Term (5.8) in der Definition von γ dem Wert Null annähert, die Verteilungsfunktion nähert sich der Grenze der Stabilität, und die Heizung durch Welle - Teilchen - Wechselwirkung läßt nach. Für positive v , genauer gesagt für v mit $\frac{\partial F_1}{\partial v} < 0$, folgen dagegen aus (5.8) stets negative Werte für γ , so daß die Heizung der Teilchen, d.h. in erster Linie von $F_1(v)$, fortgesetzt werden kann. Dadurch wächst die Temperaturanisotropie in diesem Bereich immer weiter an, bis die in Abbildung 5.41 festzustellende Verlagerung des Maximums von $F_1(v)$ diesem Vorgang bei gegebener Geschwindigkeit v Einhalt gebietet.

Der Plot von γ zeigt einen dementsprechenden Verlauf, für $v < 0$ weist γ betragsmäßig kleine Werte auf, für sehr kleine v nähert sich die Anwachsrate sogar der Null an, und für $v > 0$ setzt

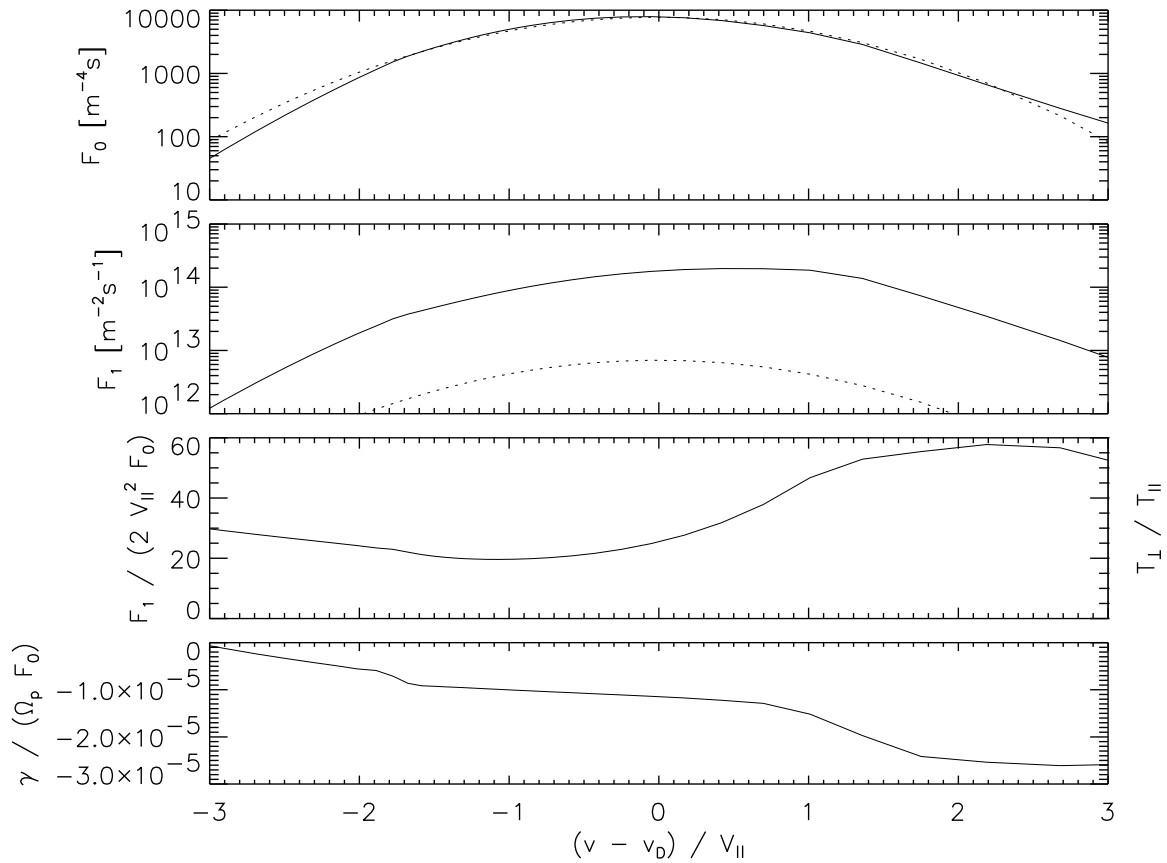


Abbildung 5.41: Reduzierte Verteilungsfunktionen der Fe^{16+} - Ionen in einer Höhe von 509 190 km. Die gestrichelten Linien geben die Werte äquivalenter Maxwellverteilungen an. Zusätzlich ist die Anwachsrate γ der Wellen nach (2.71), normiert auf die Protonengyrofrequenz Ω_p und die reduzierte Verteilungsfunktion F_0 , dargestellt.

eine Verstärkung der Absorption der Wellen ein.

Die Sättigung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung durch eine zu große Temperaturanisotropie für $v < 0$ konnte auch bei den Verteilungsfunktionen des Sauerstoffs in Abbildung 5.31 festgestellt werden. Es ist bemerkenswert, daß die Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ dort nur Werte von maximal 8 erreichte, während sie hier 30 beträgt. Die Ursache dafür liegt in der Struktur des Ausdrucks (5.8), der in dem hier vorliegenden Fall $v_{ph} \gg v_{th}$ durch $-v_{ph} F_0(v) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1(v)}{\partial v}$ angenähert werden kann. Für den Fall einer Bi-Maxwellverteilung gilt $\frac{1}{2} \frac{\partial F_1(v)}{\partial v} = -\frac{V_{\perp}^2}{V_{\parallel}^2} (v - v_D) F_0(v)$, so daß dieser Term mit der Temperaturanisotropie anwächst. Auch wenn die Beziehung bei Abweichungen von einer Bi-Maxwellverteilung nicht exakt gilt, basiert die Sättigung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung darauf, daß der zweite Summand mit wachsender Anisotropie irgendwann in der Lage ist, den stets negativen ersten Summanden zu kompensieren.

Doch der zweite Summand weist einen weiteren Faktor $(v - v_D)$ auf. Dieser ist an die thermische Geschwindigkeit V_{\parallel} der betrachteten Teilchensorte gekoppelt, da für $|v - v_D|$ größer als einige V_{\parallel} fast keine Teilchen mehr vorliegen. Da die zu einer Temperatur von $2 \cdot 10^6$ K gehörende thermische Geschwindigkeit des Eisens mit $V_{\text{Fe}^{16+}, \parallel} = 17.2 \text{ km/s}$ wesentlich kleiner

ist als die des Sauerstoffs von $V_{O^{5+},\parallel} = 32.1 \text{ km/s}$, ist beim Eisen eine größere Temperaturanisotropie nötig, um den Ausdruck (5.8) gleich Null zu setzen. Der Unterschied zwischen den thermischen Geschwindigkeiten um einen Faktor 2 kann den beobachteten Faktor 4 in den Anisotropien zwar nicht vollständig erklären, doch diese quantitative Rechnung gilt nur für eine Bi-Maxwellverteilung exakt, von der die $F_k(v)$ der Ionen in beiden Modellrechnungen stark abweichen. Im qualitativen Sinne erklärt die niedrigere thermische Geschwindigkeit des Eisens die höhere Temperaturanisotropie.

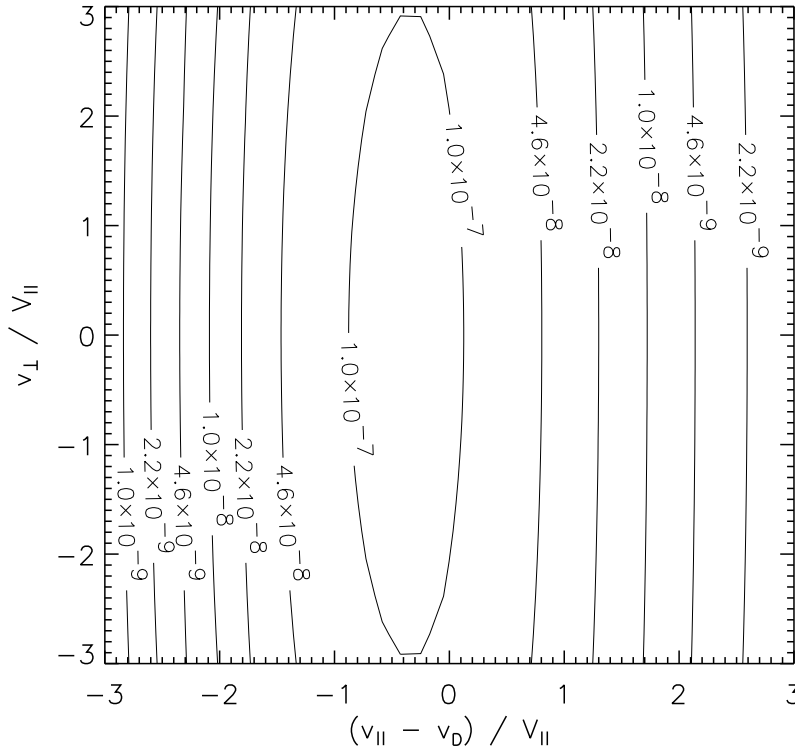


Abbildung 5.42: Rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ des Eisens in einer Höhe von 509 190 km.

Die in Abbildung 5.42 dargestellte rekonstruierte 2 - dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ ist durch die starke Temperaturanisotropie gekennzeichnet. Die von ihr verursachte Verzerrung in v_{\perp} - Richtung ist so stark, daß eine Deformation der Verteilungsfunktion kaum zu erkennen ist. Allerdings fällt auf, daß auch $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ der Fe^{16+} - Ionen für negative v_{\parallel} rascher abfällt als für positive v_{\parallel} .

Doch die nur schwache Deformation der Isolinien muß nicht nur auf ihre Ausdehnung in v_{\perp} - Richtung durch die starke Temperaturanisotropie zurückzuführen sein. Auch die Coulomb - Stöße können einen Beitrag dazu leisten. Ein Vergleich der Ergebnisse der beiden Modellrechnungen mit O^{5+} und Fe^{13+} nach Abbildung 5.32 und 5.36 zeigt, daß die infolge der höheren Ladung q und größeren Masse m und der damit verbundenen niedrigeren thermischen Geschwindigkeit effektiveren Coulomb - Stöße zu einer größeren Ähnlichkeit der Verteilungsfunktion der Fe^{13+} - Ionen mit einer Bi-Maxwellverteilung führten.

Aus dem Ausdruck (5.13) für die Coulomb - Stoßfrequenz ν der schweren Ionen an Protonen folgt, daß Fe^{16+} eine um einen Faktor 2.9 höhere Stoßfrequenz aufweist als O^{5+} . Die Eisenionen

werden daher deutlich stärker an den Protonen gestreut als die Sauerstoffionen. Für Fe^{13+} betrug der Faktor 1.9, doch die größere Ionenladung verursacht durch eine stärkere Coulomb – Kraft wirksamere Stöße.

Noch deutlichere Ergebnisse liefert ein Vergleich der Stoßfrequenzen der schweren Ionen an sich selber. Aus der Definition (3.35) der Stoßfrequenz ν folgt bei gleicher Ionentemperatur eine Abhängigkeit folgender Form:

$$\nu \propto N \cdot \frac{q^4}{\sqrt{m}} \quad (5.15)$$

Ein Vergleich der Werte für die Fe^{16+} und O^{5+} zeigt, daß die Stoßfrequenz für die Eisenionen trotz ihrer um einen Faktor 0.16 geringeren Dichte 9.0 - fach höher ist als die der Sauerstoffionen.

Aufgrund der hohen Masse und Ladung der Fe^{16+} - Ionen sind die Coulomb – Stöße daher in der Lage, annähernd eine Bi-Maxwellverteilung aufrechtzuerhalten, obwohl die Welle - Teilchen – Wechselwirkung zu einer extremen Temperaturanisotropie führt.

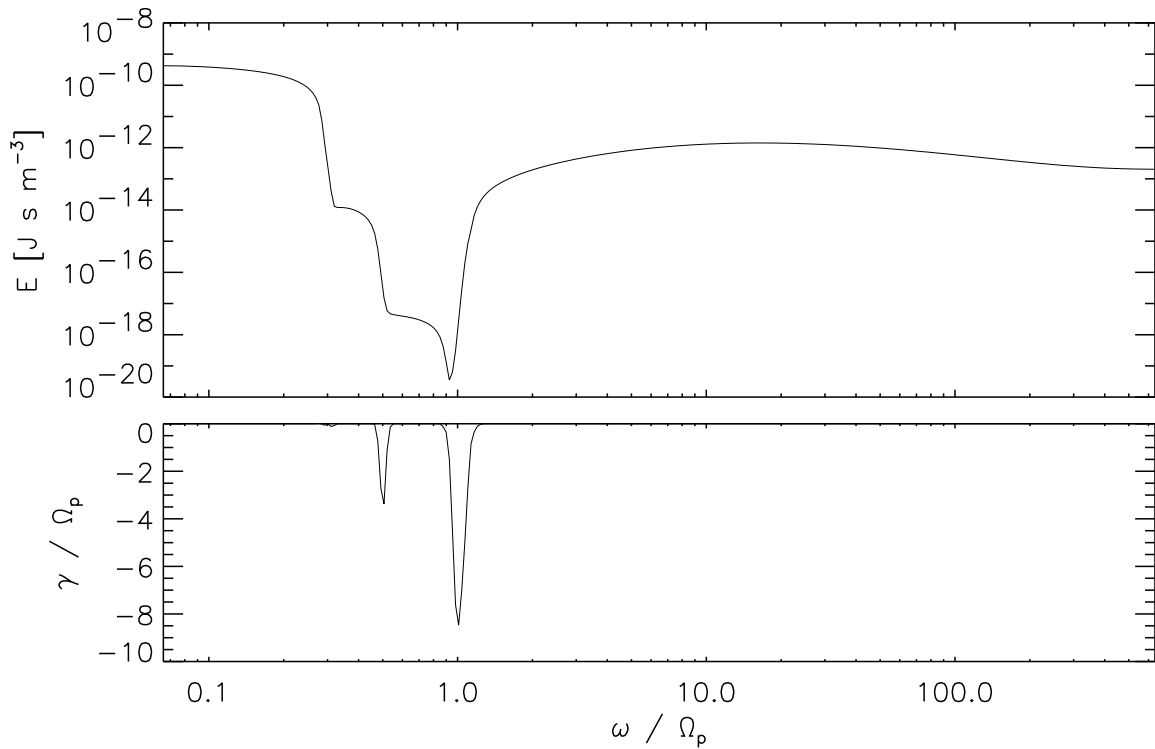


Abbildung 5.43: Das Spektrum der Plasmawellen in einer Höhe von 509 190 km

Das Spektrum der Plasmawellen nach Abbildung 5.43 zeigt den bekannten Verlauf mit den starken Einbrüchen der Wellenenergie an den Gyrofrequenzen der verschiedenen Ionensorten. Die Absorption der Wellen durch die Fe^{16+} - und O^{5+} - Ionen erscheint im Spektrum aufgrund ihrer ähnlichen Gyrofrequenzen als ein einziger scharfer Rückgang der spektralen Energiedichte, doch im Plot der Anwachsrate γ erscheint sie als zwei schwache, aber getrennte Minima. Die Werte $|\gamma| > \Omega_p$ für die leichteren Ionen sind auch hier unbedenklich, da die Wellenenergie an den zugehörigen Frequenzen durch die von den schweren Ionen verursachte Absorption um viele Größenordnungen unter ihrem Ausgangswert liegt.

5.4.4 Zusammenfassung der Modelle bis zu $1R_{\odot}$

Die drei Modellrechnungen bis in eine Höhe von $1R_{\odot}$ unterscheiden sich nur durch die Wahl der schweren Ionen, aber sie liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse. Bei der ersten Simulation wurde wie bei den vorhergehenden O^{5+} als Repräsentant schwerer Ionen verwendet. Das Ergebnis entsprach den von dem Modell bis in eine Höhe von $4 \cdot 10^5$ km und dem Versuch, es in den Sonnenwind fortzusetzen, bekannten Resultaten. In einer Höhe von knapp über $h = 4 \cdot 10^5$ km entkoppelt sich $T_{O^{5+},\perp}$ von den übrigen Iontemperaturen, und die Temperatur des Sauerstoffs steigt über alle Grenzen, was schließlich zum Abbruch der Rechnung führt.

Die dabei auftretenden extrem hohen Werte bis zu $T_{O^{5+},\perp} = 10^8$ K und die damit verbundenen Temperaturanisotropien stimmen jedoch mit Beobachtungen des koronalen Plasmas überein.

Die Ersetzung der O^{5+} - durch Fe^{13+} - Ionen führte zu grundsätzlich anderen Ergebnissen. Die numerische Stabilität ist deutlich verbessert, und die Temperaturanisotropie weist deutlich kleinere Werte auf, wobei im Laufe der Simulationszeit stationäre Werte erreicht werden. Auch die reduzierten Verteilungen $F_k(v)$ zeigen andere Verläufe. Beim Sauerstoff führte die extreme Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v)$ im Bereich negativer v zu einer Sättigung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung, die Verteilungen näherten sich ihrer Stabilitätsgrenze, und die Anwachsrate γ strebte gegen Null. Bei den Eisenionen treten dagegen nur geringe Anisotropien auf, und die Teilchen mit negativer Geschwindigkeit und entsprechend kleinerer Resonanzfrequenz werden bevorzugt geheizt, während sich γ nur wenig ändert.

Der einzige Unterschied zwischen den beiden Simulationen besteht in der Masse und Ladung der schweren Ionen. Aufgrund der Abhängigkeit der Coulomb - Stoßfrequenz ν von m und q nach (3.35) weisen die Eisenionen deutlich stärkere Coulomb - Stöße als die Sauerstoffionen auf. Dadurch ist das Eisen besser in der Lage, die ihm durch die Welle - Teilchen - Wechselwirkung zugeführte Energie an andere Ionensorten abzugeben, wodurch eine Entkopplung von $T_{Fe^{13+},\perp}$ von den übrigen Temperaturen weitgehend verhindert wird.

Unter dem Einfluß der Plasmawellen wird $F_1(v)$ und damit T_{\perp} bevorzugt erhöht. Die Coulomb - Stöße sind nicht stark genug, $T_{\parallel} = T_{\perp}$ zu halten, aber sie schaffen es, F_0 und F_1 jeweils einer Maxwellverteilung anzunähern, so daß die Verteilungsfunktion des Eisens eine größere Ähnlichkeit mit einer Bi-Maxwellverteilung aufweist als die des Sauerstoffs.

Die Unterschiede der beiden Simulationen zeigen, wie groß der Einfluß der Wahl des Repräsentanten der schweren Ionen auf die Simulationsergebnisse ist. Deswegen ist es sinnvoll und höchst aufschlußreich, eine Rechnung mit verschiedenen schweren Ionen durchzuführen.

Die Simulation mit vier Ionensorten liefert weitere interessante Ergebnisse. Trotz des nur geringen Unterschieds der Gyrofrequenzen der beiden schweren Ionensorten O^{5+} und Fe^{16+} tritt eine bevorzugte Heizung des Eisens auf, für den Sauerstoff bleibt nur ein kleiner Teil der Wellenenergie übrig. Durch die geringere Dichte des Eisens im Vergleich zu der vorhergehenden Simulation sind seine Coulomb - Stöße mit sich selber schwächer, und die Wellenenergie verteilt sich auf weniger Teilchen. Dadurch wächst die Eisentemperatur, besonders $T_{Fe^{16+},\perp}$, unbegrenzt an, so daß die Ergebnisse für das Eisen denen des Sauerstoffs in der ersten Simulation bis in eine Höhe von $1R_{\odot}$ ähneln.

Die Betrachtung der klassischen Coulomb - Stoßfrequenz fördert weitere interessante Ergebnisse zutage. Die schweren und hoch ionisierten Teilchen können so starke Coulomb - Stöße

aufweisen, daß ihre im Vergleich zu leichteren Ionen geringe Häufigkeit ausgeglichen oder sogar überkompensiert wird. So folgt nach (5.14) für die Stöße von Protonen an schweren Ionen, daß die Stoßfrequenz an Fe^{16+} - Ionen um einen Faktor 7.1 höher ist als die an O^{5+} - Ionen, obwohl für die Dichte des Eisens nur das 0.16 - fache der des Sauerstoffs angesetzt wurde.

Hinzu kommt noch, daß die Ionen schwerer Elemente in der Regel niedrigere Gyrofrequenzen aufweisen als z.B. O^{5+} , so daß sie durch den Prozeß des “frequency sweeping” zuerst mit bisher unverbrauchter Wellenenergie wechselwirken und so bevorzugt geheizt werden.

Ein Vergleich der Höhenprofile der Protonen und He^{2+} - Ionen der Rechnung mit O^{5+} als einziger Ionensorte nach Abbildung 5.30 und der Simulation mit 4 Ionensorten, d.h. O^{5+} mit derselben Häufigkeit und zusätzlich Fe^{16+} nach Abbildung 5.38, zeigt, daß die Temperaturen der leichten Ionen im Bereich des oberen Randes des Rechenfeldes unter Berücksichtigung von Fe^{16+} mit $1.5 \cdot 10^6$ K etwas höher sind als bei der Rechnung ohne Fe^{16+} , bei der nur $1.3 \cdot 10^6$ K erreicht werden. Wenn das Modell demnach die Eisenionen berücksichtigt und sie anstelle des Sauerstoffs bevorzugt heizt, dann führen die trotz der geringeren Dichte wirksameren Stöße der leichten Ionen an den Eisenionen zu einer merklichen Temperaturerhöhung.

Daraus folgt, daß die schweren Ionen trotz ihrer Seltenheit in der Lage sind, einen großen Einfluß auf die Plasmaprozesse der Korona auszuüben.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein kinetisches Modell entwickelt, das die Berechnung der Ionenverteilungen in der Korona unter dem Einfluß von resonanter Wechselwirkung mit Ionenzyklotronwellen, Coulomb – Stößen, der durch die Magnetfeldtopologie vorgegebenen Flußröhrengeometrie sowie dem elektrischen und Gravitationsfeld erlaubt.

Da Verteilungsfunktionen $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ von je drei Koordinaten des Raumes und der Geschwindigkeit abhängen, war es aus Gründen des Rechenaufwands notwendig, reduzierte Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ einzuführen und ausgehend von der Vlasov – Gleichung für die Verteilungen $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ Gleichungen für die $F_k(v_{\parallel})$ zu entwickeln. Dies stellte sich als unproblematisch heraus, lediglich für die auf dem Landau – Stoßintegral basierenden Coulomb – Stöße mußte die zusätzliche Annahme maxwellverteilter Stoßpartner eingeführt werden, um Stoßoperatoren für die $F_k(v_{\parallel})$ zu erhalten. Die mit nicht unerheblichem algebraischen Aufwand verbundene Herleitung ist in Anhang A ausführlich dargestellt. Um die Reihe von Gleichungen für $F_k(v_{\parallel})$, $k \in \mathbf{N}$, abzuschließen, werden die $F_k(v_{\parallel})$ mit $k \geq 2$ mit Hilfe der Gaußschen Näherung durch $F_1(v_{\parallel})$ oder auch $F_0(v_{\parallel})$ ersetzt.

Die Berechnung der Welle - Teilchen – Wechselwirkung erfolgt im Rahmen der quasilinearen Theorie, die zu Diffusionsgleichungen für die $F_k(v_{\parallel})$ führt. Die Energieerhaltung wird dabei sichergestellt, indem der Energiegewinn der Teilchen von der Wellenenergie abgezogen wird. Für die Behandlung des Wellenspektrums ergeben sich die beiden Möglichkeiten, entweder von einer starren Form des Spektrums auszugehen und nur seine Gesamtenergie zu variieren, oder durch die Einführung einer Frequenzkoordinate ein variables Spektrum zu betrachten. Die Annahme eines starren Spektrums ist zwar physikalisch problematisch, aber es wird dennoch versucht, auf ihr basierende Modelle zu berechnen.

Die Einführung der reduzierten Verteilungsfunktionen stellt eine erhebliche Vereinfachung dar, indem sie nicht nur die Zahl der Geschwindigkeitskoordinaten, sondern auch die der räumlichen Koordinaten von drei auf eine einzige vermindert. Da es sich bei der modellierten Struktur eines koronalen Trichters um eine im Vergleich zur Transitzeit eines Teilchens durch das Rechenfeld langlebige Struktur handelt, wird eine stationäre Lösung der Vlasov – Gleichung für

die $F_k(v_{\parallel})$ gesucht. Die numerische Lösung erfolgt durch zeitliche Relaxation ausgehend von Anfangsbedingungen, die mit Hilfe eines einfachen Flüssigkeitsmodells berechnet wurden. Bei der Berechnung von Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}}$ wird eine Korrektur auf Erhaltung der Teilchendichte durchgeführt, damit sich Fehler höherer Ordnung nicht im Laufe der Simulation aufsummieren. Die Berechnung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung und der Coulomb - Stöße erfolgt in separaten Teilschritten, wobei die Erhaltung der Teilchendichte ebenfalls sichergestellt wird.

Das kinetische Modell basiert demnach auf folgenden Näherungen:

- Gyrotropie der Verteilungsfunktionen $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$
- Einführung reduzierter Verteilungsfunktionen $F_k(s, v_{\parallel}, t)$
- Gaußsche Näherung für die $F_k(v_{\parallel})$ mit $k \geq 2$
- Beschreibung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung durch die quasilineare Theorie
- Berechnung der Coulomb - Stöße durch das Landau - Stoßintegral
- Dabei Annahme maxwellverteilter Stoßpartner

Es ist zu beachten, daß die Annahme maxwellverteilter Stoßpartner ebenso wie die Gaußsche Näherung und die numerischen Differentiationen (3.14), (3.15) der reduzierten Verteilungen nach v_{\parallel} im thermischen Gleichgewicht mit Maxwell'schen $F_k(v_{\parallel})$ exakt gelten.

Die bei der Herleitung der Vlasov - Gleichung für die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ gemachten Näherungen ließen es sinnvoll erscheinen, das numerische Verfahren vor den eigentlichen Modellrechnungen für die Korona der Sonne einigen Tests zu unterziehen. Die Berechnung der Coulomb - Stöße in homogenen Nichtgleichgewichtsplasmen zeigte eine gute Einhaltung der Impuls- und Energieerhaltung, der Fehler bei der Teilchenzahl ist durch die Korrektur auf die Teilchendichte identisch Null. Auch die Simulation eines kalten, schnell in eine sich aufweitende Flußröhre strömenden Plasmas zeigte gute Erhaltungseigenschaften und bewies, daß das numerische Verfahren in einen stationären Endzustand konvergiert. Die Simulation eines Plasmas mit einem Temperaturgradienten ergab schließlich, daß die numerischen Ergebnisse für die $F_k(v_{\parallel})$ eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Rechnungen von Spitzer und Härm (1953) aufweisen. Aus den Tests kann gefolgert werden, daß das numerische Modell die Physik des Plasmas korrekt beschreibt und verlässliche Ergebnisse liefert.

Nach dem erfolgreichen Abschluß der Tests wurden die eigentlichen Modellrechnungen für das Plasma in einem koronalen Trichter begonnen. Zuerst wurden in der unteren Korona Simulationen für ein Protonenplasma und für ein aus Protonen, He^{2+} und O^{5+} bestehendes Plasma jeweils unter dem Ansatz eines starren und eines variablen Spektrums berechnet.

Beim starren Spektrum wurden kaum Unterschiede zwischen den verschiedenen Ionensorten festgestellt, und der Heizungsprozeß war auf den unteren Teil des Rechenfeldes konzentriert. Die rasche Absorption der Wellenenergie auf wenigen Ionenträgheitslängen machte die Einführung eines kleinen Faktors $\chi \ll 1$ zur Dämpfung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung notwendig. Durch die Wahl des Zahlenwertes von χ war die Ausdehnung des Bereichs, in dem die Heizung stattfand, willkürlich. Die Temperaturprofile der verschiedenen Ionen waren sehr ähnlich, es gab

nur leichte Temperaturanisotropien, und die in der Korona beobachtete bevorzugte Heizung der schweren Ionen war nur andeutungsweise festzustellen. Die reduzierten Verteilungen wiesen keine Eigenschaften auf, an denen die Wirkung der Welle - Teilchen - Wechselwirkung zu erkennen ist.

Ein ganz anderes Bild ergab sich unter Verwendung eines variablen Wellenspektrums. Der Heizungsprozeß des Plasmas fand nun im gesamten Rechenfeld statt, und bei der Rechnung mit mehreren Ionensorten war eine starke Heizung und Temperaturanisotropie des Sauerstoffs festzustellen, während die leichteren Ionen nur schwach geheizt wurden.

Als Ursache für diesen Verlauf stellte sich die Variabilität der Gyrofrequenzen der Ionen in der sich mit der Höhe aufweitenden Geometrie des koronalen Trichters heraus. Mit zunehmender Höhe treten die Ionen mit Wellen immer niedriger Frequenz in Wechselwirkung, und da sich die Wellen von der Sonne in die Korona hinein ausbreiten, finden die Teilchen mit der niedrigsten Resonanzfrequenz, und damit die O^{5+} - Ionen, bevorzugt die volle, unverbrauchte Wellenenergie vor und werden entsprechend stark geheizt. Da die Welle - Teilchen - Wechselwirkung hauptsächlich zu einer Erhöhung von T_{\perp} führt, kommt es zu den mit Beobachtungen der Korona übereinstimmenden hohen Temperaturen und Anisotropien des Sauerstoffs.

Mit der Voraussetzung eines starren Spektrums kann dieser Mechanismus des “frequency sweeping” nicht beschrieben werden. Daher und aufgrund der physikalischen Probleme mit dem Faktor χ des Modells mit starrem Spektrum stellt es sich als notwendig heraus, eine Variation der Form des Spektrums zuzulassen.

Beim anschließenden Versuch, das Modell bis in den Sonnenwind fortzusetzen, wurde zunächst die Höhe des Rechenfeldes verdoppelt. Dabei setzte sich die schon beim Modell der unteren Korona andeutende Entwicklung fort, die senkrechte Temperatur des Sauerstoffs stieg mit zunehmender Höhe auf Werte der Größe 10^7 K an, wodurch eine Temperaturanisotropie der Ordnung $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \approx 10$ entstand. Die reduzierten Verteilungen wiesen dabei einen deutlich von einer Bi-Maxwellverteilung abweichenden Verlauf auf. Da sich im Rechenfeld nach unten bewegend Teilchen eine besonders niedrige Resonanzfrequenz aufweisen, werden sie besonders stark geheizt, so daß es zu einer deutlichen Deformation der Verteilungsfunktion kommt. Eine Rekonstruktion der Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ zeigte einen raschen Abfall auf der der Sonne zugewandten Seite und einen langsameren Rückgang auf der sonnenabgewandten Seite. Die Form der Ionenverteilung wies dadurch Ähnlichkeiten mit im Sonnenwind gemessenen Protonenverteilungen auf.

Damit wurde ein echter kinetischer Effekt gefunden. Eine Veränderung der Verteilungsfunktion kann nur im Rahmen der kinetischen Theorie beschrieben werden. Das hier entwickelte Modell liefert Ergebnisse für die Ionenverteilung in der Korona, die mit keinem auf Maxwell- oder Bi-Maxwellverteilungen basierenden Flüssigkeitsmodell zu gewinnen wären.

Das mit der Höhe fortschreitende Anwachsen von T_{\perp} des Sauerstoffs führte bei dem Versuch, das Modell bis in den Sonnenwind fortzusetzen, zum Abbruch der Rechnung, es fand keine Konvergenz mehr statt. Als Ursache stellten sich die mit zunehmender Höhe und dadurch sinkender Teilchendichte immer schwächer werdenden Coulomb - Stöße heraus, die schließlich nicht mehr in der Lage waren, in ausreichendem Maße für einen Energietransfer zwischen den Ionensorten zu sorgen. Dennoch erlaubten die reduzierten Verteilungsfunktionen speziell des Sauerstoffs interessante Einblicke in den Prozeß der koronalen Heizung. Beim Verlauf der von

der Welle - Teilchen – Wechselwirkung besonders stark beeinflussten Verteilung $F_1(v_{\parallel})$ fiel auf, daß anders als in geringer Höhe nicht die Teilchen mit negativer Geschwindigkeit, sondern die mit positivem v_{\parallel} extrem geheizt wurden. Dadurch kam es zu einer Verlagerung des Maximums von $F_1(v_{\parallel})$, und die verallgemeinerte Temperaturanisotropie $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}(v_{\parallel})$ nahm im Bereich positiver v_{\parallel} extrem hohe Werte an.

Die Untersuchung der Anwachsrate γ erklärte dieses Verhalten. Für negative v_{\parallel} hatte die Verteilungsfunktion die Grenze der Stabilität erreicht, so daß keine weitere Wellenenergie absorbiert wurde. Dagegen fand für positive v_{\parallel} weitere Absorption statt. Dieses Verhalten konnte mit Hilfe der funktionalen Abhängigkeit des γ von den Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ erklärt werden.

Auch daran zeigen sich die Vorteile eines kinetischen Modells. Wenn im Rahmen einer Flüssigkeitstheorie für die $F_k(v_{\parallel})$ Bi-Maxwellverteilungen vorgegeben werden, erhält man grundsätzlich andere Ergebnisse. Zwar liefert die Stabilitätsanalyse dann mit Beobachtungen z.B. der Magnetosheath der Erde konsistente Resultate, aber die Stabilität der Verteilung für $\frac{\partial F_1}{\partial v_{\parallel}} > 0$ wird nicht gefunden. Damit liefert das in der vorliegenden Arbeit entwickelte kinetische Modell erneut Ergebnisse, die mit Flüssigkeitsmodellen oder allgemeiner mit Modellen, die auf Vorgaben für die Form der Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ basieren, nicht gefunden werden können. Erst durch die hier durchgeführte Betrachtung der Ionenverteilungen lassen sich diese Details des koronalen Heizungsprozesses untersuchen.

Bei allen bisherigen Simulationsrechnungen wurde O^{5+} als Repräsentant der schweren Ionen verwendet. Da es in der Korona aber viele verschieden schwere und hoch ionisierte Teilchensorten gibt, wurde die Wahl der Ionensorte variiert. Aufgrund der Instabilität der Rechnung bis in den Sonnenwind wurde die Höhe des Rechenfeldes auf $1R_{\odot}$ zurückgenommen. Eine Simulation mit O^{5+} - Ionen reproduzierte im wesentlichen das Ergebnis des Modells bis in den Sonnenwind, wobei die rekonstruierte 2-dimensionale Verteilungsfunktion $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ einen echten “Beam” aufwies. Nach der Ersetzung des O^{5+} durch Fe^{13+} ergaben sich jedoch grundsätzlich andere Ergebnisse. Die Rechnung war numerisch stabil, und die sich mit der Höhe entwickelnde Temperaturanisotropie der Eisenionen ähnelte der des Sauerstoffs bei früheren Rechnungen in deutlich geringerer Höhe. Dies galt auch für die reduzierten Verteilungsfunktionen des Eisens, die verallgemeinerte Temperaturanisotropie war nicht nur schwach, sondern variierte auch weniger stark als Funktion der Geschwindigkeit, und es wurden die Teilchen mit negativem v_{\parallel} und entsprechend niedriger Resonanzfrequenz bevorzugt geheizt. Die $F_k(v_{\parallel})$ waren weit von ihrer Stabilitätsgrenze entfernt und wiesen eine größere Ähnlichkeit mit einer Bi-Maxwellverteilung auf als die des Sauerstoffs bei den früheren Rechnungen.

Als Ursache dieses Lösungsverhaltens stellten sich die infolge der größeren Ladung und Masse der Eisenionen stärkeren Coulomb – Stöße heraus. Sie sorgten für einen Energieausgleich zwischen den Ionensorten auch bei Plasmadichten, bei denen dies mit den O^{5+} - Ionen nicht mehr gelang.

Da die Wahl der schweren Ionensorte im Modell einen so schwerwiegenden Einfluß auf die Ergebnisse hat, wurde eine weitere Rechnung mit O^{5+} - Ionen und zusätzlichen Fe^{16+} - Ionen durchgeführt. Die Gyrofrequenz der Eisenionen war nur geringfügig kleiner als die der Sauerstoffionen, dennoch wurde das Eisen bevorzugt geheizt, für den Sauerstoff blieb nur wenig Wellenenergie übrig. Da die Dichte der Eisenionen niedriger als die des Sauerstoffs angesetzt wurde, verteilte sich die Wellenenergie auf weniger Ionen, so daß das T_{\perp} des Eisens immer

weiter anwuchs und seine Verteilung stark anisotrop wurde. Dadurch ähnelten seine Verteilungen denen des Sauerstoffs in der Modellrechnung ohne Fe^{16+} - Ionen, sie erreichten im Bereich negativer v_{\parallel} die Stabilitätsgrenze, während $F_1(v_{\parallel})$ für positive v_{\parallel} sehr stark anwuchs. Doch es zeigten sich wichtige Unterschiede zwischen den beiden Modellen mit und ohne Fe^{16+} - Ionen. Die leichteren Ionen erreichten im oberen Bereich des Rechenfeldes bei der Rechnung mit Fe^{16+} höhere Temperaturen. Die Ursache dafür sind die trotz niedrigerer Dichte im Vergleich zum O^{5+} effektiveren Coulomb – Stöße des Fe^{16+} , die für einen besseren Temperatúrausgleich sorgen.

Die Ergebnisse der Simulationen mit verschiedenen schweren Ionensorten verdeutlichen damit die wichtige Rolle, die schwere Ionen trotz ihrer niedrigen Dichte bei der Heizung des koronalen Plasmas spielen. Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell erlaubt es, die Wechselwirkung der Ionen sowohl mit Plasmawellen als auch untereinander auf der Ebene der Verteilungsfunktionen zu beschreiben. Auf diese Weise kann der Heizungsprozeß der Korona untersucht werden und wichtige Beobachtungen am koronalen Plasma wie die bevorzugte Heizung und die starken Temperaturanisotropien der schweren Ionen modelliert werden.

Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse des kinetischen Modells in einigen Stichpunkten zusammengefaßt:

- Tests auf Konvergenz und Erhaltungseigenschaften des Modells verlaufen erfolgreich.
- Der Ansatz eines starren Spektrums der Plasmawellen führt zu physikalischen Problemen und numerisch unbefriedigenden Resultaten.
- Unter Verwendung eines variablen Spektrums werden Beobachtungsergebnisse wie eine bevorzugte eine Heizung schwerer Ionen unter Entwicklung starker Temperaturanisotropien $T_{\perp} > T_{\parallel}$ reproduziert.
- Es treten Deformationen der Verteilungsfunktion auf. Teilchen mit negativem v_{\parallel} und damit erniedrigter Resonanzfrequenz werden verstärkt geheizt. Dabei handelt es sich um einen mit Flüssigkeitsmodellen nicht beschreibbaren kinetischen Effekt.
- Der Mechanismus des “frequency sweeping” erklärt sowohl die bevorzugte Heizung schwerer Ionen als auch die Verformungen der Verteilungsfunktionen.
- In einem dünnen, nicht stoßdominierten Plasma können extreme Iontemperaturen und sehr große Temperaturanisotropien auftreten.
- Dabei spielen die Stabilitätseigenschaften der Ionenverteilungen für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung eine wichtige Rolle. Diese Untersuchungen sind nur im Rahmen einer kinetischen Theorie möglich.
- Die Wahl der schweren Ionensorte im Modellplasma erweist sich als kritisch, da die Wirkung der Coulomb – Stöße mit steigender Ionenladung und -masse stark zunimmt.
- Modellrechnungen mit verschiedenen schweren Ionen weisen darauf hin, daß schwere Ionen trotz ihrer geringen Dichten einen wesentlichen Einfluß auf die Plasmakinetik in der Korona haben.

Das kinetische Modell liefert demnach zahlreiche neue Erkenntnisse über die physikalischen Vorgänge im Plasma der Sonnenkorona und erlaubt eine detailliertere Untersuchung des koronalen Heizungsprozesses durch Ionenzyklotronresonanz, als es mit Flüssigkeitsmodellen möglich wäre.

6.2 Ausblick

Für weiterführende Untersuchungen mit dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten kinetischen Modell bietet es sich zunächst an, die Wechselwirkung der schweren Ionen und ihre Konkurrenz um die Wellenenergie durch die Hinzunahme weiterer Ionensorten genauer zu studieren. Dies führt zu einer erheblichen Erhöhung des Rechenaufwands, ist aber mit keiner prinzipiellen Schwierigkeit verbunden.

Modifikationen des Modells werden notwendig, wenn auch in Rechenfeldern, die sich in eine größere Höhe in der Korona oder sogar im Sonnenwind erstrecken, numerische Stabilität und Konvergenz erzielt werden soll. Durch die Abnahme der Dichte und damit auch der Coulomb – Stöße kommt es bisher zu einer Entkopplung der Temperaturen der verschiedenen Ionensorten, so daß die Temperatur der bevorzugt geheizten Spezies praktisch unbegrenzt wächst. Dies führt zu extrem hohen Temperaturen, speziell T_{\perp} , und großen Temperaturanisotropien. Dabei ist festzustellen, daß sich die in den Simulationen gefundenen Temperaturen der Größenordnung 10^8 K noch im Rahmen der Beobachtungen des koronalen Plasmas bewegen.

Daher ist der Frage nachzugehen, ob die Temperatur unbegrenzt weiter wächst und die Rechnung dadurch instabil wird, oder ob das numerische System unter solchen Umständen keine oder nur eine instabile stationäre Lösung hat, so daß kein stabiler Endzustand gefunden werden kann.

Im einem realen Plasma führen die großen Temperaturunterschiede zwischen den verschiedenen Komponenten zu Plasmainstabilitäten und damit zur Emission von Wellen, die dann zur Heizung anderer Ionensorten zur Verfügung stehen können. Auf diese Weise kann auch ohne Coulomb – Stöße ein Energieübertrag zwischen verschiedenen Ionensorten erfolgen.

Doch das numerische Modell in der hier vorgestellten Form berücksichtigt solche Effekte aufgrund der vereinfachten Behandlung der Dispersionsrelation der Wellen nicht. Eine voll selbstkonsistente Behandlung der Dispersionsrelation erscheint nicht realisierbar, da dann schnelle Zeitskalen wie die Gyrationperioden aufgelöst werden müßten. Diese schnellen Skalen stehen den sehr langen Transitzeiten in einem großen Rechenfeld gegenüber, so daß sich der Rechenaufwand erheblich vergrößert.

Dennoch erscheint es als sinnvolle Erweiterung, das Modell der Welle - Teilchen – Wechselwirkung dahingehend auszubauen, daß Plasmainstabilitäten berücksichtigt werden, um das Problem des unbegrenzten Anwachsens einzelner Iontemperaturen zu vermeiden.

Die Vereinfachung der Dispersionsrelation durch Annahme dispersionsfreier Wellen vernachlässigt außerdem den Einfluß der Zyklotronresonanzen der schweren Ionen auf das Dispersionsverhalten des Plasmas. Aufgrund der niedrigen Ionendichten ist der Effekt zwar nur gering, aber er betrifft gerade die Frequenzen, an denen eine Wechselwirkung zwischen den Ionen und den Wellen stattfindet. Dadurch ist eine Erweiterung des Modells um eine detailliertere Behandlung der Dispersionseigenschaften des Plasmas durchaus sinnvoll.

Anhang A

Coulomb – Stöße für reduzierte Verteilungen

In Abschnitt 2.4.1 wurde das Landau – Stoßintegral

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{Coul.} = \sum_j \Gamma_j L_j \quad (\text{A.1})$$

für eine Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ unter dem Einfluß von Coulomb – Stößen mit verschiedenen Teilchensorten j hergeleitet. Der Vorfaktor Γ_j wurde dabei zu

$$\Gamma_j = \frac{q^2 q_j^2}{4\pi \epsilon_0^2 m^2} \ln(\Lambda_j) \quad (\text{A.2})$$

mit dem Coulomb – Logarithmus

$$\Lambda_j = M_j \frac{12\pi \epsilon_0 \lambda_D}{|qq_j|} \left(\frac{kT}{m} + \frac{kT_j}{m_j} \right) \quad (\text{A.3})$$

bestimmt. Für das Stoßintegral L_j wurde folgender Ausdruck gefunden:

$$L_j = 4\pi \frac{m}{m_j} f(\vec{v}) f_j(\vec{v}) + \left(1 - \frac{m}{m_j}\right) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial H_j}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} : \frac{\partial^2 G_j}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \quad (\text{A.4})$$

Bei G_j und H_j handelt es sich um die “Rosenbluth – Potentiale”:

$$G_j = \int d\vec{v}_j |\vec{v} - \vec{v}_j| f_j(\vec{v}_j) \quad (\text{A.5})$$

$$H_j = \int d\vec{v}_j \frac{f_j(\vec{v}_j)}{|\vec{v} - \vec{v}_j|} \quad (\text{A.6})$$

Zur Entwicklung der Vlasov – Gleichung (2.32) für reduzierte Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ wird ein Coulomb – Stoßoperator $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ benötigt. Nach Abschnitt 2.4.2 kann dieser durch Anwendung des Integraloperators I_k nach (2.16) auf den Stoßoperator (A.1) hergeleitet werden:

$$\left(\frac{\delta F_k}{\delta t}\right)_{Coul.} = I_k \left[\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{Coul.} \right] = 2\pi \int_0^\infty v_{\perp}^{2k+1} \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{Coul.} dv_{\perp} \quad (\text{A.7})$$

Der Term auf der rechten Seite ergibt sich aus der Gyrotropie der $f_j(\vec{v})$ und damit von $(\frac{\delta f}{\delta t})_{Coul.}$. Es wurde auch festgestellt, daß sich die Abhängigkeit des Stoßoperators für die F_k auf die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{||})$ und $F_{j,k}(v_{||})$ beschränken muß, eine Abhängigkeit von den ursprünglichen Verteilungsfunktionen $f(\vec{v})$ und $f_j(\vec{v})$ ist nicht zulässig, da dann kein abgeschlossenes System von Gleichungen für die $F_k(v_{||})$ vorliegt.

Da die Einführung reduzierter Verteilungen auf der rechten Seite von (A.7), die Anwendung des Integraloperators I_k und die Berechnung von $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ mit erheblichem algebraischen Aufwand verbunden ist, wurden die entsprechenden Rechnungen in Abschnitt 2.4.2 in diesen Anhang ausgelagert.

A.1 Die Rosenbluth – Potentiale

Die Rosenbluth – Potentiale (A.5), (A.6) bestehen aus Integralen über die Geschwindigkeitsverteilung des Stoßpartners $f_j(\vec{v}_j)$, die mit dem Betrag der Geschwindigkeitsdifferenz $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{\pm 1}$ gewichtet sind. Dabei ist \vec{v} eine vorgegebene Geschwindigkeit, an der das Stoßintegral für $f(\vec{v})$ berechnet werden soll.

Da bei der Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32) für die reduzierten Verteilungen nur die $F_{j,k}(v_{||})$, nicht aber die $f_j(\vec{v})$ bekannt sind, besteht der erste Schritt bei der Herleitung eines Stoßoperators für die $F_k(v_{||})$ darin, die Abhängigkeit der Rosenbluth – Potentiale von den Verteilungsfunktionen $f_j(\vec{v}_j)$ zu beseitigen.

A.1.1 Versuch, die Rosenbluth – Potentiale durch reduzierte Verteilungen $F_{j,k}(v_{j,||})$ auszudrücken

Da die Rosenbluth – Potentiale durch ein Integral der Verteilungsfunktion des Stoßpartners berechnet werden, ist es eine naheliegende Idee, die Integration über $v_{j,||}$ und $\vec{v}_{j,\perp}$ zu trennen und das Integral über $\vec{v}_{j,\perp}$ zur Einführung der reduzierten Verteilungsfunktionen $F_{j,k}(v_{j,||}) = 2\pi \int_0^\infty v_{j,\perp}^{2k+1} f_j(\vec{v}_j) dv_{j,\perp}$ des Stoßpartners zu nutzen.

Damit die Definition (2.2) der reduzierten Verteilungen eingesetzt werden kann, muß sich die Abhängigkeit der Gewichtsfunktion $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{\pm 1}$ von $v_{j,\perp}$ auf eine Reihe in $v_{j,\perp}^2$ beschränken. Um nach der anschließenden Anwendung des Integraloperators I_k auf das Stoßintegral L_j nach (A.4) die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{||})$ einführen zu können, ist es ferner notwendig, daß die Rosenbluth – Potentiale ebenfalls Reihen in v_\perp^2 darstellen.

Für das Rosenbluth – Potential H_j mit seiner Gewichtsfunktion $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{-1}$ wird dadurch eine Reihenentwicklung

$$|\vec{v} - \vec{v}_j|^{-1} = \sum_{m,n} \tilde{a}_{mn}(v_{||}, v_{j,||}, \varphi) v_\perp^{2m} v_{j,\perp}^{2n} \quad (\text{A.8})$$

notwendig. φ ist die Differenz der Gyrationwinkel von \vec{v} und \vec{v}_j . Einsetzen in die Definition (A.6) ergibt:

$$H_j = \sum_m v_\perp^{2m} \sum_n \int_{-\infty}^\infty a_{mn}(v_{||}, v_{j,||}) F_{j,n}(v_{j,||}) dv_{j,||} \quad (\text{A.9})$$

Die Koeffizienten $a_{mn}(v_{\parallel}, v_{j,\parallel})$ werden durch Integration der $\tilde{a}_{mn}(v_{\parallel}, v_{j,\parallel}, \varphi)$ über φ berechnet. Für $n > 1$ ist $F_{j,n}(v_{j,\parallel})$ mit Hilfe der Gaußschen Näherung (2.13) zu bestimmen. Wenn die $a_{mn}(v_{\parallel}, v_{j,\parallel})$ gefunden worden sind und die Reihe konvergiert, und G_j in analoger Weise in eine Reihe entwickelt wurde, dann steht der Anwendung des Integraloperators I_k auf die Stoßintegrale L_j nichts mehr im Weg, die Summation über m liefert eine Reihe über alle reduzierten Verteilungen $F_m(v_{\parallel})$, wobei für $m > 1$ wieder die Gaußsche Näherung zu verwenden ist.

Es gilt $|\vec{v} - \vec{v}_j| = \sqrt{(v_{\parallel} - v_{j,\parallel})^2 + v_{\perp}^2 + v_{j,\perp}^2 - 2v_{\perp}v_{j,\perp} \cos \varphi}$. Aufgrund der Gyrotropie der Verteilungsfunktionen $f_j(\vec{v}_j)$ kann die Integration über φ in der Definition (A.5), (A.6) der Rosenbluth – Potentiale sofort durchgeführt werden. Das Ergebnis ist jedoch lediglich die Identifikation dieser Ausdrücke als elliptische Integrale, für die keine analytische Lösung angebar ist. Damit scheitert der Ansatz, erst über φ zu integrieren und das Ergebnis in eine Reihe in $v_{\perp}^{2m} v_{j,\perp}^{2n}$ zu entwickeln.

Eine Reihenentwicklung der Wurzel ist zwar möglich, führt aber nur zu Ausdrücken in $(v_{\perp}/v_{j,\perp})^{2m}$ oder $(v_{j,\perp}/v_{\perp})^{2m}$, nicht jedoch in $v_{\perp}^{2m} v_{j,\perp}^{2n}$, wie nach (A.8) gefordert. Auch der Versuch, mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom der Form (A.8) an $|\vec{v} - \vec{v}_j|^{-1}$ anzupassen, liefert nur sehr unbefriedigende Resultate.

Ein weiterer Punkt ist die Singularität, die der Integrand in der Definition (A.6) von H_j an der Stelle $\vec{v}_j = \vec{v}$ aufweist. Zwar hat die Singularität keine negativen Auswirkungen auf die Existenz des Integrals, aber sie kann durch eine Reihenentwicklung (A.8) nicht nachgebildet werden. Damit ist der Ansatz (A.8) und folglich die Darstellung (A.9) des Rosenbluth – Potentials H_j durch die reduzierten Verteilungen des Stoßpartners j nicht durchführbar.

Diese Problematik zeigt sich auch an dem Stoßintegral L_j . In der Form (2.104) besteht es zwar nur aus Termen, die Produkte von $f(\vec{v})$ und Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j sind, die dazu äquivalente Form (A.4) weist dagegen einen Summanden auf, der ein Produkt der Verteilungsfunktionen $f(\vec{v})f_j(\vec{v})$ enthält. Es ist nicht möglich, so ein Produkt nach Anwendung des Integraloperators I_k durch die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ und $F_{j,k}(v_{\parallel})$ auszudrücken.

Es stellt sich damit als nicht möglich heraus, die Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j mit Hilfe der reduzierten Verteilungsfunktionen $F_{j,k}(v_{j,\parallel})$ des Stoßpartners j zu berechnen. Es ist unvermeidlich, bei der Bestimmung von G_j und H_j geeignete Näherungen zu verwenden.

A.1.2 Analytische Näherungsausdrücke für die Rosenbluth – Potentiale

Da die Verteilungsfunktionen der Stoßpartner $f_j(\vec{v}_j)$ bei der Lösung der Vlasov – Gleichung (2.32) nicht bekannt sind und die reduzierten Verteilungen $F_{j,k}(v_{j,\parallel})$ nicht verwendet werden können, ist es bei der Berechnung der Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j notwendig, die Verteilungsfunktionen $f_j(\vec{v}_j)$ durch geeignete Modellverteilungen zu ersetzen.

Um den dabei entstehenden Fehler gering zu halten, sollte die Modellverteilung möglichst genau der wirklichen Verteilungsfunktion $f_j(\vec{v}_j)$ bzw. den reduzierten Verteilungen $F_{j,k}(v_{j,\parallel})$ entsprechen. Die Teilchenzahl N_j , die Driftgeschwindigkeit $v_{j,D}$ und die Temperatur T_j dürfen auf keinen Fall verändert werden, da der Stoßprozeß ansonsten grob falsch beschrieben wird.

Nach der Ersetzung der Verteilungsfunktion $f_j(\vec{v}_j)$ in der Definition (A.5), (A.6) der Rosenbluth – Potentiale durch die Modellverteilung sollten G_j und H_j analytisch zu berechnen und in eine Potenzreihe in v_\perp^2 entwickelbar sein, damit die reduzierten Verteilungen $F_k(v_\parallel)$ bei der anschließenden Anwendung des Integraloperators I_k auf das Stoßintegral L_j eingeführt werden können.

Die Ersetzung von $f_j(\vec{v})$ durch eine Modellverteilung löst außerdem das Problem eines Produkts $f(\vec{v})f_j(\vec{v})$ in L_j , wenn auch die Modellfunktion in eine Reihe in v_\perp^2 entwickelbar ist.

Es bietet sich an, als Modellfunktion für $f_j(\vec{v}_j)$ eine Bi-Maxwellverteilung zu verwenden, da dann nicht nur die Dichte N_j , Driftgeschwindigkeit $v_{j,D}$, sondern auch die Temperaturen $T_{j,\parallel}$, $T_{j,\perp}$ und damit die Temperaturanisotropie $T_{j,\perp}/T_{j,\parallel}$ ihre korrekten Werte behalten.

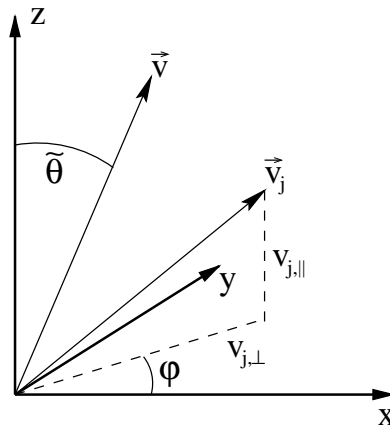


Abbildung A.1: Das zur Bestimmung der Rosenbluth – Potentiale verwendete Koordinatensystem

Die Abbildung A.1 stellt das zur Berechnung der Rosenbluth – Potentiale verwendete Koordinatensystem dar. Die z - Achse weist in die Richtung des Hintergrundmagnetfeldes. Aufgrund der Gyrotropie der Verteilungsfunktionen stellt es keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, wenn das Koordinatensystem so gedreht wird, daß der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} in der x-z - Ebene liegt. Der Winkel φ ist dann wieder die Differenz der Gyrationwinkel von \vec{v}_j und \vec{v} . Für den Betrag der Geschwindigkeitsdifferenz gilt:

$$|\vec{v} - \vec{v}_j| = \sqrt{(v_{j,\perp} \cos \varphi - v \sin \tilde{\theta})^2 + (v_{j,\perp} \sin \varphi)^2 + (v_{j,\parallel} - v \cos \tilde{\theta})^2} \quad (\text{A.10})$$

Eine Bi-Maxwellverteilung ist genau wie die eigentliche Verteilungsfunktion $f_j(\vec{v}_j)$ gyotrop und damit unabhängig von φ . Bei der Berechnung der Rosenbluth – Potentiale führt die Integration über φ genau wie im schon diskutierten Fall allgemeiner $f_j(\vec{v}_j)$ zum Auftreten von elliptischen Integralen, die nicht weiter analytisch ausgewertet werden können.

Das Problem mit der Integration über den Gyrationwinkel φ kann auf das Vorhandensein zweier ausgezeichneten Richtungen zurückgeführt werden. Zum einen ist dies die durch die z - Achse in Abbildung A.1 angedeutete Richtung des Hintergrundmagnetfeldes, die der Richtung der Anisotropie der Bi-Maxwellverteilung entspricht, zum anderen die Richtung der vorgegebenen Geschwindigkeit \vec{v} .

Wenn $\tilde{\theta} = 0$ ist und beide ausgezeichnete Richtungen zusammenfallen, dann vereinfacht sich der Ausdruck (A.10) für den Betrag der Geschwindigkeitsdifferenz erheblich:

$$|\vec{v} - \vec{v}_j| = \sqrt{v_{j,\perp}^2 + (v_{j,\parallel} - v)^2} \quad (\text{A.11})$$

Er wird unabhängig von φ , so daß die Integration über alle Gyrationwinkel nicht nur möglich, sondern sogar trivial wird.

Allerdings ist es mit einem bi-Maxwellschen $f_j(\vec{v}_j)$ nicht möglich, das Koordinatensystem in Abbildung A.1 so um die y - Achse zu drehen, daß $\tilde{\theta} = 0$ wird, ohne daß trigonometrische Funktionen des Winkels θ zwischen der z - Achse und der Richtung des Hintergrundmagnetfeldes im Exponenten der Verteilungsfunktion $\exp(-\frac{v_{j,\parallel}^2}{2V_{j,\parallel}^2} - \frac{v_{j,\perp}^2}{2V_{j,\perp}^2})$ auftreten. Diese Komplikation tritt nur dann nicht auf, wenn die Verteilungsfunktion $f_j(\vec{v}_j)$ isotrop ist.

Daher reicht es nicht aus, $f_j(\vec{v}_j)$ durch eine Bi-Maxwellverteilung zu ersetzen, es ist eine isotrope Modellverteilung notwendig. Daher wird $f_j(\vec{v}_j)$ durch eine Maxwellverteilung mit gleicher Dichte N_j und Temperatur T_j ersetzt. Eine Maxwellverteilung ist nur dann isotrop, wenn sie keine Driftgeschwindigkeit aufweist. Dies stellt aber kein Problem dar, da die Berechnung der Stöße mit den Stoßpartnern der Ionensorte j einfach in dem Ruhesystem der Teilchensorte j erfolgen kann. Dieser Wechsel des Bezugssystems ist möglich, da die Stöße mit verschiedenen Stoßpartnern j nach dem Ansatz (A.1) unabhängig voneinander berechnet werden. Dies ist auch der Grund für die in Abschnitt 2.4.1 diskutierte Aufspaltung in verschiedene Rosenbluth – Potentiale G_j , H_j anstelle eines einzigen Satzes an Potentialen G , H .

Durch den Ansatz maxwellverteilter Stoßpartner wird eine analytische Berechnung der Rosenbluth – Potentiale ermöglicht. Mit Hilfe der thermischen Geschwindigkeit $v_{j,th}$ wird

$$\beta = \frac{1}{2 \cdot v_{j,th}^2} \quad (\text{A.12})$$

definiert und folgende Verteilungsfunktion in die Definitionen (A.5), (A.6) der Rosenbluth – Potentiale eingesetzt:

$$f_j(\vec{v}_j) = N_j \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v_j^2} \quad (\text{A.13})$$

Das Koordinatensystem in Abbildung A.1 wird nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit so um die y - Achse gedreht, daß $\tilde{\theta} = 0$ ist. Die Zylinderkoordinaten $(v_{j,\parallel}, v_{j,\perp}, \varphi)$ für \vec{v}_j werden durch Kugelkoordinaten (v_j, θ, φ) ersetzt, dabei ist $v_{j,\parallel} = v_j \cos \theta$ und $v_{j,\perp} = v_j \sin \theta$. Für den Betrag der Geschwindigkeitsdifferenz gilt dann nach (A.11):

$$|\vec{v} - \vec{v}_j| = \sqrt{v^2 + v_j^2 - 2vv_j \cos \theta} \quad (\text{A.14})$$

Für die Integration über alle \vec{v}_j in Kugelkoordinaten gilt

$$d^3 \vec{v}_j = v_j^2 \sin \theta d\theta d\phi dv_j \quad (\text{A.15})$$

wobei das Integral über φ aufgrund der Unabhängigkeit des Integranden von φ trivialerweise einen Faktor 2π liefert. Die Integration über θ ergibt für das Rosenbluth – Potential H_j nach (A.6):

$$2\pi \int_0^\pi \frac{f_j(v_j)}{\sqrt{v^2 + v_j^2 - 2vv_j \cos \theta}} \sin \theta d\theta = N_j \cdot e^{-\beta v^2} \cdot \frac{4\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{v} & , v_j < v \\ \frac{1}{v_j} & , v_j \geq v \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Die anschließende Integration über v_j liefert:

$$2\pi \int_0^\infty dv_j v_j^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{f_j(v_j)}{\sqrt{v^2 + v_j^2 - 2vv_j \cos \theta}} = \frac{4N_j \beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^v e^{-\beta v_j^2 \frac{v^2}{v}} dv_j + \int_v^\infty e^{-\beta v_j^2} v_j dv_j \right) \quad (\text{A.17})$$

Die Auswertung dieser Integrale liefert schließlich:

$$H_j = \frac{N_j}{v} \operatorname{erf}(\sqrt{\beta}v) \quad (\text{A.18})$$

Eine entsprechende Rechnung kann auch für das Rosenbluth – Potential G_j nach Gl. (A.5) durchgeführt werden. Das Ergebnis lautet:

$$G_j = N_j \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\beta\pi}} - \frac{e^{-\beta v^2}}{\sqrt{\beta\pi}} - \frac{2\sqrt{\beta}v^2 e^{-\beta v^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{\beta}v)}{2\beta v} - \frac{2\Gamma(2, 0, \beta v^2)}{\sqrt{\beta\pi}} \right) \quad (\text{A.19})$$

Bei $\operatorname{erf}(x)$ handelt es sich um die Fehlerfunktion und bei $\Gamma(\frac{3}{2} + m, 0, y)$ um die „unvollständige Gammafunktion“, die folgendermaßen definiert ist:

$$\Gamma(a, z_0, z) = \int_{z_0}^z e^{-t} t^{a-1} dt \quad (\text{A.20})$$

Damit sind analytische Ausdrücke für die Rosenbluth – Potentiale gefunden worden. Für maxwellverteilte Stoßpartner j gelten sie exakt, andernfalls sind sie nur eine Näherung. Da die Maxwellverteilung nur mit Hilfe der Momente von $f_j(\vec{v}_j)$ berechnet wird, entfällt das Problem, $f_j(\vec{v}_j)$ durch die reduzierten Verteilungen $F_{j,k}(v_{j,\parallel})$ zu ersetzen.

Es ist jedoch nach wie vor erforderlich, die Abhängigkeit des Stoßintegrals L_j nach (A.4) von der Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ unter Anwendung des Integraloperators I_k in eine Abhängigkeit von den reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ umzuwandeln. Die Verwendung der Definition (2.2) der F_k ist nur möglich, wenn die Rosenbluth – Potentiale als Potenzreihen in v_{\perp}^2 beschreibbar sind. Die hier gewonnenen Ausdrücke für G_j und H_j enthalten jedoch transzendente Funktionen von $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$.

Es ist möglich, diese Funktionen in Potenzreihen in v_{\parallel}^2 und v_{\perp}^2 zu entwickeln. Die Formeln für G_j und H_j sind zunächst Funktionen von $x = v\sqrt{\beta}$, nicht von den einzelnen Komponenten v_{\parallel} und v_{\perp} . Daher werden zuerst Reihenentwicklungen in x eingeführt. Die auftretenden Funktionen lassen sich folgendermaßen entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{erf}(x)}{x} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n!} x^{2n} \\ x \cdot \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n!} x^{2n+2} \\ \Gamma(2, 0, x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+2} x^{2(n+2)} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Zusätzlich wird die Exponentialreihe $\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ verwendet. Diese Reihen konvergieren für alle x . Es ist bemerkenswert, daß alle Reihen nur gerade Potenzen in x enthalten.

Da $x^2 = \beta v^2$ ist, kann v durch die Komponenten v_{\parallel} und v_{\perp} ausgedrückt werden, ohne daß die Wurzel in den Gleichungen auftaucht. Zur Ersetzung von v^{2n} wird der binomische Satz verwendet:

$$v^{2n} = (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} v_{\parallel}^{2(n-m)} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.22})$$

Die Anwendung des binomischen Satzes auf die Reihenentwicklungen (A.21) und Einsetzen in die Ergebnisse (A.18) und (A.19) für die Rosenbluth – Potentiale liefert schließlich nach einer Änderung der Summationsreihenfolge deren Reihenentwicklungen in v_{\parallel}^2 und v_{\perp}^2 :

$$G_j = \frac{-2N_j}{\sqrt{\beta\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \beta^{n+m} \frac{1}{4(m+n)^2 - 1} \cdot \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.23})$$

$$H_j = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \beta^{n+m} \frac{1}{2(m+n) + 1} \cdot \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.24})$$

Die Gleichung (A.4) für das Landau – Stoßintegral enthält nicht nur die Rosenbluth – Potentiale, sondern auch einen Summanden mit der Verteilungsfunktion f_j der Stoßpartner. Auch für diesen ist die Approximation durch eine Maxwellverteilung einzusetzen. Um eine Reihe in v_{\perp}^2 zu erhalten, ist die Maxwellverteilung durch die Exponentialreihe zu entwickeln. Der erste Summand der Gleichung (A.4) nimmt dann zusammen mit seinem Vorfaktor 4π bis auf den Faktor $f(\vec{v})$ folgende Form an:

$$4\pi f_j(v) = \frac{4N_j\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \beta^{n+m} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.25})$$

Damit ist es gelungen, unter der Näherung maxwellverteilter Stoßpartner analytische Formeln für die Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j zu finden, deren Abhängigkeit von v_{\perp} sich auf Potenzreihen in v_{\perp}^2 beschränkt. Damit sind die notwendigen Vorbereitungen für die Herleitung eines Landau – Stoßintegrals für reduzierte Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ abgeschlossen. Die Berechnung der Rosenbluth – Potentiale erfordert nur die Kenntnis der Momente N_j , $v_{j,D}$ und T_j des Stoßpartners j . Diese Momente lassen sich mit Hilfe der reduzierten Verteilungen $F_{j,0}(v_{j,\parallel})$ und $F_{j,1}(v_{j,\parallel})$ bestimmen, so daß die Vlasov – Gleichungen für die $F_{j,k}$, $k = 0, 1$ auch unter Berücksichtigung der Coulomb – Stöße ein geschlossenes System von Gleichungen bilden.

A.2 Die Bildung des Landau – Stoßintegrals für die reduzierten Verteilungen

Die Berechnung des Coulomb – Stoßoperators $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ für reduzierte Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ nach (A.7) ist aufgrund der Definition des Coulomb – Stoßoperators (A.1) für Verteilungsfunktionen $f(\vec{v})$ mit der Anwendung des Integraloperators I_k nach (2.16) auf Summanden der Form $\Gamma_j L_j$ verbunden. Der Vorfaktor Γ_j nach (A.2) kann mit Hilfe von Momenten der reduzierten Verteilungen berechnet werden und weist keine direkte Abhängigkeit von den $f_j(\vec{v})$

auf. Bei der Bestimmung der $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ kann er folglich vor die Integration über v_\perp gezogen werden:

$$\left(\frac{\delta F_k}{\delta t}\right)_{Coul.} = \sum_j \Gamma_j I_k[L_j] \quad (A.26)$$

Es bleibt die Wirkung des Integraloperators I_k auf das Stoßintegral L_j zu bestimmen. Dazu wird der allgemeine Ausdruck (A.4) für L_j zuerst in Zylinderkoordinaten $(v_\parallel, v_\perp, \varphi)$ aufgeschrieben. Aufgrund der Gyrotropie der Verteilungsfunktionen sind sowohl $f(v_\parallel, v_\perp)$ als auch die Rosenbluth – Potentiale G_j, H_j unabhängig vom Gyrationwinkel φ . Dadurch ergibt sich für L_j :

$$\begin{aligned} L_j(v_\parallel, v_\perp) = & 4\pi \frac{m}{m_j} f(v_\parallel, v_\perp) f_j(v_\parallel, v_\perp) + \left(1 - \frac{m}{m_j}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial v_\parallel} \frac{\partial H_j}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \frac{\partial H_j}{\partial v_\perp} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v_\parallel^2} \frac{\partial^2 G_j}{\partial v_\parallel^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v_\parallel \partial v_\perp} \frac{\partial^2 G_j}{\partial v_\parallel \partial v_\perp} + \frac{\partial^2 f}{\partial v_\perp^2} \frac{\partial^2 G_j}{\partial v_\perp^2} + \frac{1}{v_\perp^2} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \frac{\partial G_j}{\partial v_\perp} \right) \end{aligned} \quad (A.27)$$

Das Stoßintegral $L_j(v_\parallel, v_\perp)$ setzt sich aus Ableitungen sowohl der Verteilungsfunktion $f(v_\parallel, v_\perp)$ als auch der Rosenbluth – Potentiale nach v_\parallel und nach v_\perp zusammen. Für die im letzten Abschnitt hergeleiteten Reihenentwicklungen für G_j und H_j können die benötigten Ableitungen leicht berechnet werden. Ableitungen nach v_\parallel sind völlig unproblematisch, da auch die reduzierten Verteilungen F_k Funktionen von v_\parallel sind und eine Differentiation nach v_\parallel mit der Integration über v_\perp zur Einführung reduzierter Verteilungen vertauschbar ist. L_j enthält jedoch auch Ableitungen der Verteilungsfunktion $f(v_\parallel, v_\perp)$ nach v_\perp . Bei der Ausführung der Integrationen über v_\perp verhindern sie zunächst eine Identifikation der reduzierten Verteilungen $F_k(v_\parallel)$. Um diese Ableitungen zu beseitigen, wird die Methode der partiellen Integration verwendet.

A.2.1 Elimination von $\frac{\partial f}{\partial v_\perp}$ durch partielle Integration

Nach Gleichung (A.27) gehen folgende Terme mit Ableitungen von $f(v_\parallel, v_\perp)$ nach v_\perp in das Landau – Stoßintegral ein:

$$\frac{\partial f}{\partial v_\perp} \frac{\partial H}{\partial v_\perp}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_\parallel \partial v_\perp} \frac{\partial^2 G}{\partial v_\parallel \partial v_\perp}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_\perp^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_\perp^2}, \quad \frac{1}{v_\perp^2} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \frac{\partial G}{\partial v_\perp} \quad (A.28)$$

Diese Ausdrücke sollen jetzt unter dem Integraloperator I_k , der durch die Voraussetzung der Gyrotropie die einfache Form $I_k = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp^{2k+1}$ annimmt, durch partielle Integration so umgeformt werden, daß sie keine Ableitungen von $f(v_\parallel, v_\perp)$ nach v_\perp mehr enthalten. Für den ersten Term $\frac{\partial f}{\partial v_\perp} \frac{\partial H}{\partial v_\perp}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \left(v_\perp^{2k+1} \frac{\partial H}{\partial v_\perp} \right) dv_\perp &= f v_\perp^{2k+1} \frac{\partial H}{\partial v_\perp} \Big|_{v_\perp=0}^\infty - \int_0^\infty f \frac{\partial}{\partial v_\perp} \left(v_\perp^{2k+1} \frac{\partial H}{\partial v_\perp} \right) dv_\perp \\ &= - \int_0^\infty f v_\perp^{2k+1} \left(\frac{2k+1}{v_\perp} \frac{\partial H}{\partial v_\perp} + \frac{\partial^2 H}{\partial v_\perp^2} \right) dv_\perp \end{aligned}$$

Der erste Summand $f v_{\perp}^{2k+1} \frac{\partial H}{\partial v_{\perp}} \Big|_{v_{\perp}=0}^{\infty}$ verschwindet, da f für $v_{\perp} \rightarrow \infty$ wie $\exp(-v_{\perp}^2)$, d.h. schneller als jede Potenz von v_{\perp} , gegen 0 geht. Also gilt:

$$I_k \left[\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial H}{\partial v_{\perp}} \right] = I_k \left[-f \left(\frac{2k+1}{v_{\perp}} \frac{\partial H}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial^2 H}{\partial v_{\perp}^2} \right) \right] \quad (\text{A.29})$$

Für den zweiten Term in Gl. (A.28) ergibt sich in völlig analoger Weise:

$$I_k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} \right] = I_k \left[-\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \left(\frac{2k+1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} + \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}^2} \right) \right] \quad (\text{A.30})$$

Der dritte Term von (A.28) weist eine zweifache Ableitung von f nach v_{\perp} auf. Daher sind zwei partielle Integrationen notwendig, um diese Ableitung zu eliminieren. Die erste Integration entspricht den beiden vorhergehenden Rechnungen:

$$I_k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} \right] = I_k \left[-\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \left(\frac{2k+1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} \right) \right]$$

Die zweite partielle Integration liefert folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} v_{\perp}^{2k+1} \left(\frac{2k+1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} \right) dv_{\perp} &= -f v_{\perp}^{2k+1} \left(\frac{2k+1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} \right) \Big|_{v_{\perp}=0}^{\infty} + \\ &\quad \int_0^{\infty} f v_{\perp}^{2k+1} \left(\frac{2k(2k+1)}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{2(2k+1)}{v_{\perp}} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} \right) dv_{\perp} \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ergibt der erste Summand auf der rechten Seite $f \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} \Big|_{v_{\perp}=0}$, ansonsten den Wert 0. Der Term $-f v_{\perp}^{2k+1} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} \Big|_{v_{\perp}=0}$ verschwindet für alle k . Insgesamt gilt:

$$I_k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} \right] = 2\pi \delta_{k0} f \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} \Big|_{v_{\perp}=0} + I_k \left[f \left(\frac{2k(2k+1)}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{2(2k+1)}{v_{\perp}} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} \right) \right] \quad (\text{A.31})$$

Dabei ist δ_{k0} das Kronecker – Symbol, das für $k = 0$ den Wert 1 und für alle anderen k den Wert 0 hat. Nun zum letzten Term von Gl. (A.28). Hier genügt wieder eine partielle Integration. Der Vorfaktor v_{\perp}^{-2} bewirkt jedoch, daß der bei der partiellen Integration entstehende erste Summand anders als bei (A.29) und (A.30) für $v_{\perp} = 0$ im Fall $k = 0$ nicht verschwindet:

$$I_k \left[\frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} \right] = 2\pi f v_{\perp}^{2k-1} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} \Big|_{v_{\perp}=0}^{\infty} - I_k \left[f \left(\frac{2k-1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} + \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} \right) \right] \quad (\text{A.32})$$

Es sieht sogar so aus, als ob er für $v_{\perp} \rightarrow 0$ singulär wird. In die Gleichung (A.27) für das Landau – Stoßintegral L_j geht aber nur die Summe von (A.31) und (A.32) ein. Daher können sie zusammengefaßt werden. Es ist:

$$\begin{aligned} I_k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} \right] &= 2\pi \delta_{k0} f \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} - \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} \right) \Big|_{v_{\perp}=0} + \\ &\quad I_k \left[\frac{4k^2+2k-1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} - \frac{2k-1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} + \frac{2(2k+1)}{v_{\perp}} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} \right] \end{aligned}$$

Bei der Differentiation der Rosenbluth – Potentiale stellt sich nach (A.48) heraus, daß $\frac{1}{v_{\perp}} \left(\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} - \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} \right)$ für $v_{\perp} = 0$ den Wert 0 annimmt. Demnach verschwindet der erste Summand auf der

rechten Seite, und des gilt:

$$I_k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v_\perp^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_\perp^2} + \frac{1}{v_\perp^2} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \frac{\partial G}{\partial v_\perp} \right] = I_k \left[\frac{4k^2 + 2k - 1}{v_\perp^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_\perp^2} - \frac{2k - 1}{v_\perp^3} \frac{\partial G}{\partial v_\perp} + \frac{2(2k + 1)}{v_\perp} \frac{\partial^3 G}{\partial v_\perp^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_\perp^4} \right] \quad (\text{A.33})$$

Mit den Gleichungen (A.29) – (A.33) können alle Ableitungen von f nach v_\perp in L_j unter dem Integraloperator I_k beseitigt werden. Damit wurde das letzte Problem für die Berechnung des Landau – Stoßintegrals für die reduzierten Verteilungen beseitigt, $I_k[L_j]$ kann nun bestimmt werden.

A.2.2 Die Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale

Der erste Schritt hierzu ist die Berechnung aller benötigten Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j . Durch die partiellen Integrationen wurden zu den in Gleichung (A.27) vorkommenden Ableitungen zusätzliche, höhere Ableitungen eingeführt.

Die Ableitungen von G_j und H_j sind mit Hilfe der Reihenentwicklungen (A.23) und (A.24) sehr leicht zu bestimmen. Beide Reihen haben die Struktur

$$A(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} \frac{1}{m!n!} x^{2m} y^{2n}$$

Für die 1. Ableitung gilt:

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} \frac{2m}{m!n!} x^{2m-1} y^{2n} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+1,n} \frac{2}{m!n!} x^{2m+1} y^{2n}$$

Und für die 2.:

$$\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+1,n} \frac{2(2m+1)}{m!n!} x^{2m} y^{2n}$$

Für die 3.:

$$\frac{\partial^3 A(x, y)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+1,n} \frac{4m(2m+1)}{m!n!} x^{2m-1} y^{2n} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+2,n} \frac{4(2m+3)}{m!n!} x^{2m+1} y^{2n}$$

Und schließlich die 4.:

$$\frac{\partial^4 A(x, y)}{\partial x^4} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+2,n} \frac{4(2m+1)(2m+3)}{m!n!} x^{2m} y^{2n}$$

Die Berechnung gemischter Ableitungen ist ebenfalls nicht schwierig:

$$\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} \frac{1}{m!n!} 4mn x^{2m-1} y^{2n-1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+1,n+1} \frac{4}{m!n!} x^{2m+1} y^{2n+1}$$

und

$$\frac{\partial^3 A(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m+1,n+1} \frac{4(2m+1)}{m!n!} x^{2m} y^{2n+1}$$

Die benötigten Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale lassen sich mit Hilfe dieser Beziehungen sofort aufschreiben:

$$\frac{\partial H}{\partial v_{\parallel}} = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2}{2(m+n)+3} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n+1} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial H}{\partial v_{\perp}} = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2}{2(m+n)+3} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v_{\perp}^2} = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2(2m+1)}{2(m+n)+3} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v_{\parallel}^2} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2(2n+1)}{4(m+n+1)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+2} \frac{4}{4(m+n+2)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n+1} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}^2} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+2} \frac{4(2m+1)}{4(m+n+2)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n+1} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2(2m+1)}{4(m+n+1)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m-2} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2}{4(m+n+1)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m-2} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+2} \frac{4(2m+3)}{4(m+n+2)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} = -\frac{2N_j}{\sqrt{\pi}\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+2} \frac{4(2m+3)(2m+1)}{4(m+n+2)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.43})$$

Bevor nun $I_k[L_j]$ aufgestellt wird, ist es sinnvoll, die Reihenentwicklungen der durch die partiellen Integrationen (A.29) – (A.33) entstandenen Ausdrücke zusammenzufassen. Dadurch kann auch versucht werden, die in Gl. (A.40) und (A.41) für $m = 0$ auftretenden negativen Potenzen von v_{\perp} zu eliminieren, denn diese sind mit der Definition der reduzierten Verteilungen (2.2) unvereinbar.

A.2.3 Reihenentwicklungen der Summanden von L_j nach Gl. (A.27)

Die partiellen Integrationen zur Beseitigung von Ableitungen der Form $\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}$ lieferten für unterschiedliche Werte von k unterschiedliche Ergebnisse. Da nur Gleichungen für die reduzierten Verteilungen F_0 und F_1 aufgestellt werden sollen, werden nur die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ betrachtet. Es ergeben sich mit den obigen Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale die folgenden Reihen:

Gleichung (A.29), $k = 0$:

$$\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial H}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial^2 H}{\partial v_{\perp}^2} = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4(m+1)}{2(m+n)+3} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.44})$$

Gleichung (A.29), $k = 1$:

$$\frac{3}{v_{\perp}} \frac{\partial H}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial^2 H}{\partial v_{\perp}^2} = \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4(m+2)}{2(m+n)+3} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.45})$$

Gleichung (A.30), $k = 0$:

$$\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} + \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}^2} = \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{8(m+1)}{4(m+n+2)^2 - 1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.46})$$

Gleichung (A.30), $k = 1$:

$$\frac{3}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} + \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}^2} = \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{8(m+2)}{4(m+n+2)^2 - 1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.47})$$

Gleichung (A.33), $k = 0$: Die beiden Terme $\frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2}$ und $\frac{1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}}$ bringen negative Potenzen von v_{\perp} in die Reihenentwicklung ein. Daher ist es sinnvoll, sie getrennt zu behandeln:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} &= \frac{2N_j}{\sqrt{\beta\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{2(2m+1-1)}{4(m+n+1)^2 - 1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2(m-1)} \\ &\stackrel{m \rightarrow m+1}{=} -\frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4}{4(m+n+2)^2 - 1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \end{aligned}$$

Für $v_{\perp} \rightarrow 0$ geht dieser Ausdruck in eine Reihe der Form $\frac{2N_j \beta^{3/2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{4(n+2)^2 - 1} \frac{1}{n!} (-\beta v_{\parallel}^2)^n$ über. Sie weist eine raschere Konvergenz als die Exponentialreihe auf und liefert daher für jedes (βv_{\parallel}^2) einen endlichen Wert. Multiplikation des obigen Ausdrucks mit v_{\perp} ergibt:

$$\lim_{v_{\perp} \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} \right) = 0 \quad (\text{A.48})$$

Die mit den negativen Potenzen in v_{\perp} verbundenen Singularitäten bei $v_{\perp} \rightarrow 0$ heben sich gegenseitig auf. Die Gleichung (A.48) rechtfertigt auch das Verschwinden von $\frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} - \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} |_{v_{\perp}=0}$ bei der Durchführung der partiellen Integrationen.

Die restlichen Summanden der Gleichung (A.33) liefern:

$$\frac{2}{v_{\perp}} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} = \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4(2m+3)^2}{4(m+n+2)^2 - 1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m}$$

Insgesamt ergibt sich für die Gleichung (A.33), $k = 0$:

$$-\frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} + \frac{2}{v_{\perp}} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} = \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4(2m+3)^2 - 4}{4(m+n+2)^2 - 1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.49})$$

Gleichung (A.33), $k = 1$: In diesem Fall heben sich die Terme mit negativen Potenzen von v_{\perp} nicht gegenseitig auf. Um eine möglichst einfache Darstellung für das gesuchte $I_k[L_j]$ zu finden, ist es wünschenswert, daß alle Reihen dieselbe Struktur haben, d.h. Potenzen v_{\perp}^{2m} mit $m \geq 0$. Dann lassen sich mehrere Reihen leicht zu einer zusammenfassen. Daher werden von den ersten

beiden Summanden in (A.33), $k = 1$, die negativen Potenzen abgespalten. Für den Rest ihrer Reihenentwicklung wird dann die Transformation $m \rightarrow m + 1$ durchgeführt. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} \frac{5}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} - \frac{1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} &= \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{\perp}^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{8}{4(n+1)^2-1} \frac{1}{n!} v_{\parallel}^{2n} + \\ &\quad \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{20m+28}{4(n+m+2)^2-1} \cdot \frac{1}{(m+1)!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \end{aligned}$$

Die anderen beiden Summanden von (A.33), $k = 1$, liefern:

$$\frac{6}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} = \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4(2m+3)(2m+7)}{4(m+n+2)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m}$$

Zusammen ergeben sie folgende Entwicklung für die Gleichung (A.33), $k = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\perp}^2} - \frac{1}{v_{\perp}^3} \frac{\partial G}{\partial v_{\perp}} + \frac{6}{v_{\perp}^2} \frac{\partial^3 G}{\partial v_{\perp}^3} + \frac{\partial^4 G}{\partial v_{\perp}^4} &= \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{\perp}^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{8}{4(n+1)^2-1} \frac{1}{n!} v_{\parallel}^{2n} + \\ &\quad \frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n+1} \frac{4((2m+3)(2m+7) + \frac{5m+7}{m+1})}{4(m+n+2)^2-1} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.50}) \end{aligned}$$

Diese Reihen können nun zur Berechnung von $I_k[L_j]$ verwendet werden. Hinzu kommen noch die Entwicklungen einzelner Ableitungen von Rosenbluth – Potentialen nach (A.34) – (A.43).

A.2.4 Anwendung des Integraloperators I_k auf das Landau – Stoßintegral

Es ist sinnvoll, die einzelnen Summanden der Gleichung (A.27) für das Landau – Stoßintegral nach Vorfaktoren und verschiedenen Ableitungen von $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ nach v_{\parallel} zu ordnen:

$$\begin{aligned} L_j &= - \frac{m}{m_j} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \frac{\partial H_j}{\partial v_{\parallel}}}_{L_1} + \frac{m}{m_j} \underbrace{\left(4\pi f f_j - \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial H_j}{\partial v_{\perp}} \right)}_{L_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v_{\parallel}^2} \frac{\partial^2 G_j}{\partial v_{\parallel}^2}}_{L_3} + \\ &\quad \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \frac{\partial H_j}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial^2 f}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} \frac{\partial^2 G_j}{\partial v_{\parallel} \partial v_{\perp}} \right)}_{L_4} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial H_j}{\partial v_{\perp}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v_{\perp}^2} \frac{\partial^2 G_j}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial G_j}{\partial v_{\perp}} \right)}_{L_5} \quad (\text{A.51}) \end{aligned}$$

Die Reihenentwicklungen für die einzelnen L_h können für vorgegebenes k im Zuge der Durchführung der Integration I_k mit den berechneten Ableitungen der Rosenbluth – Potentiale (A.34) – (A.43) sowie den aus den partiellen Integrationen hervorgegangenen Ausdrücken (A.44) – (A.50) leicht zu jeweils einer Reihe zusammengefaßt werden, da alle Teilreihen denselben Vorfaktor $\frac{2N_j \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}$ aufweisen und die Summen von gleicher Struktur sind. Da Potenzreihen in v_{\perp}^2 vorliegen, ist es einfach, die reduzierten Verteilungsfunktionen zu identifizieren, denn nach den Definitionen (2.16) und (2.2) für I_k und $F_k(v_{\parallel})$ ist:

$$I_k \left[\sum_m a_m v_{\perp}^{2m} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) \right] = \sum_m a_m F_{k+m}(v_{\parallel}) \quad (\text{A.52})$$

Unter Anwendung der Gaußschen Näherung (2.13), (2.14) gilt:

$$\begin{aligned} I_0 \left[\sum_m a_m v_\perp^{2m} f(v_\parallel, v_\perp) \right] &= F_0(v_\parallel) \cdot \sum_m a_m m! (2V_\perp^2)^m \\ I_1 \left[\sum_m a_m v_\perp^{2m} f(v_\parallel, v_\perp) \right] &= F_1(v_\parallel) \cdot \sum_m a_m (m+1)! (2V_\perp^2)^m \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} x &:= 2\beta V_\perp^2 \\ y &:= \beta v_\parallel^2 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

lauten die Ergebnisse für $I_k[L_h]$:

$$I_0[L_1] = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_\parallel \frac{\partial F_0(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2(m+n)+3} (-x)^m \quad (\text{A.55})$$

$$I_1[L_1] = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_\parallel \frac{\partial F_1(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m \quad (\text{A.56})$$

$$I_0[L_2] = -\frac{4N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)F_0(v_\parallel) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2(m+n)+3} (-x)^m \quad (\text{A.57})$$

$$I_1[L_2] = -\frac{4N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)F_1(v_\parallel) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n-1)(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m \quad (\text{A.58})$$

$$I_0[L_3] = \frac{N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2 F_0(v_\parallel)}{\partial v_\parallel^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{4(m+n+1)^2-1} (-x)^m \quad (\text{A.59})$$

$$I_1[L_3] = \frac{N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2 F_1(v_\parallel)}{\partial v_\parallel^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)(m+1)}{4(m+n+1)^2-1} (-x)^m \quad (\text{A.60})$$

$$I_0[L_4] = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_\parallel \frac{\partial F_0(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-4(m-n)}{4(m+n+2)^2-1} (-x)^m \quad (\text{A.61})$$

$$I_1[L_4] = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_\parallel \frac{\partial F_1(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4(n-m)-6)(m+1)}{4(m+n+2)^2-1} (-x)^m \quad (\text{A.62})$$

$$I_0[L_5] = -\frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)F_0(v_\parallel) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(m+1)(2n+1)}{4(m+n+2)^2-1} (-x)^m \quad (\text{A.63})$$

$I_1[L_5]$ stellt einen Sonderfall dar. Denn für $k=1$ tritt in L_5 nach Gleichung (A.50) ein Vorfaktor $\frac{1}{v_\perp^2}$ auf. Dieser Vorfaktor scheint die Anwendung der Definition der reduzierten Verteilungen nach Gl. (2.2) zu verhindern. Dies ist jedoch nicht der Fall, da der Integraloperator $I_1 = \int dv_\perp v_\perp^3$ eine hinreichend hohe Potenz von v_\perp im Integranden aufweist. Der Faktor v_\perp^{-2} führt nur zu einer Verminderung des Grades der resultierenden reduzierten Verteilungsfunktion um 1.

In der Gleichung (A.50) wurde der Teil mit der Potenz v_\perp^{-2} in Form einer separaten Reihe über den Index n abgespalten. Durch die Verminderung des Grads von F_k wird diese Teilreihe unter Anwendung des Integraloperators I_k zu einer Reihe mit dem Faktor $F_0(v_\parallel)$, während der Rest von (A.50) analog zu den übrigen $I_1[L_h]$ einen Faktor $F_1(v_\parallel)$ erhält. Mit Hilfe der Gaußschen Näherung kann jedoch auch F_0 nach Gl. (2.13) durch F_1 ausgedrückt werden. Unter Anwendung der Definition von x in (A.54) kann die Teilreihe dann auf dieselbe Form wie alle anderen $I_k[L_h]$

gebracht werden. Die Anwendung von I_1 auf den Rest von Gl. (A.50) bereitet keine Probleme. Das Ergebnis ist:

$$I_1[L_5] = -\frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}(-\beta)F_1(v_{\parallel})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\frac{4}{4(n+1)^2-1} + \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)F_1(v_{\parallel})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(m+2)(2+m-2n-2mn)}{4(n+m+2)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.64})$$

Das Landau – Stoßintegral für reduzierte Verteilungen setzt sich nach (A.51) aus den einzelnen Termen (A.55) – (A.64) zusammen:

$$I_k[L_j] = -\frac{m}{m_j}I_k[L_1] + \frac{m}{m_j}I_k[L_2] + I_k[L_3] + I_k[L_4] + I_k[L_5] \quad (\text{A.65})$$

Neben der Dichte N_j ist die thermische Geschwindigkeit $v_{j,th}$ die einzige Eigenschaft des Stoßpartners, die in die $I_k[L_h]$ eingeht. Dies geschieht über den Parameter $\beta = (2v_{j,th}^2)^{-1}$. Die Ursache dafür ist die Annahme einer Maxwellverteilung für den Stoßpartner, nach der Transformation des gesamten Stoßprozesses in das Ruhesystem des Stoßpartners können weitere Eigenschaften seiner Verteilungsfunktion nicht berücksichtigt werden.

In die $I_k[L_h]$ nach (A.55) – (A.64) gehen nur die Momente der am Stoßprozeß beteiligten Teilchensorten und die Geschwindigkeit v_{\parallel} , an der das Stoßintegral ausgewertet werden soll, ein. Als zusätzlichen Faktor weisen sie den Wert einer reduzierten Verteilung $F_k(v_{\parallel})$ oder einer Ableitung davon auf. Um den Charakter der Gleichung (A.65) für $I_k[L_j]$ als Diffusionsoperator für die $F_k(v_{\parallel})$ hervorzuheben, kann die Abhängigkeit der $I_k[L_h]$ von den $F_k(v_{\parallel})$ durch Einführung neuer Koeffizienten $l_{j,k}^h$ abgetrennt werden:

$$l_{j,0}^1 = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_{\parallel}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{2(m+n)+3}(-x)^m \quad (\text{A.66})$$

$$l_{j,1}^1 = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_{\parallel}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(m+1)}{2(m+n)+3}(-x)^m \quad (\text{A.67})$$

$$l_{j,0}^2 = -\frac{4N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2(m+n)+3}(-x)^m \quad (\text{A.68})$$

$$l_{j,1}^2 = -\frac{4N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2n-1)(m+1)}{2(m+n)+3}(-x)^m \quad (\text{A.69})$$

$$l_{j,0}^3 = \frac{N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{4(m+n+1)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.70})$$

$$l_{j,1}^3 = \frac{N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(2n+1)(m+1)}{4(m+n+1)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.71})$$

$$l_{j,0}^4 = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_{\parallel}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2-4(m-n)}{4(m+n+2)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.72})$$

$$l_{j,1}^4 = \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)v_{\parallel}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(4(n-m)-6)(m+1)}{4(m+n+2)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.73})$$

$$l_{j,0}^5 = -\frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(m+1)(2n+1)}{4(m+n+2)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.74})$$

$$l_{j,1}^5 = -\frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}(-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\frac{4}{4(n+1)^2-1} + \frac{2N_j\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}(-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-y)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(m+2)(2+m-2n-2mn)}{4(n+m+2)^2-1}(-x)^m \quad (\text{A.75})$$

Mit den $l_{j,k}^h$ schreibt sich die Gleichung (A.65):

$$I_k[L_j] = -\frac{m}{m_j}l_{j,k}^1\frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} + \frac{m}{m_j}l_{j,k}^2F_k + l_{j,k}^3\frac{\partial^2 F_k}{\partial v_{\parallel}^2} + l_{j,k}^4\frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} + l_{j,k}^5F_k \quad (\text{A.76})$$

Mit dem so gefundenen Ausdruck für das Landau – Stoßintegral unter der Wirkung des Integraloperators I_k schreibt sich die Gleichung (A.26):

$$\left(\frac{\delta F_k}{\delta t}\right)_{Coul.} = \sum_j \Gamma_j \left(-\frac{m}{m_j}l_{j,k}^1\frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} + \frac{m}{m_j}l_{j,k}^2F_k + l_{j,k}^3\frac{\partial^2 F_k}{\partial v_{\parallel}^2} + l_{j,k}^4\frac{\partial F_k}{\partial v_{\parallel}} + l_{j,k}^5F_k \right) \quad (\text{A.77})$$

Diese Gleichung entspricht dem in Abschnitt 2.4.2 eingeführten Coulomb – Stoßoperator (2.114) für reduzierte Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$. Damit ist es gelungen, einen Ausdruck für $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ zu finden, die in Abschnitt 2.4.2 übergangene Herleitung ist abgeschlossen. Allerdings mußten dabei zwei wichtige Näherungen gemacht werden:

- Die exakte Verteilungsfunktion $f_j(v_{j,\parallel}, v_{j,\perp})$ des Stoßpartners wird nicht berücksichtigt. Es gehen nicht einmal seine reduzierten Verteilungen $F_{j,0}(v_{j,\parallel})$ und $F_{j,1}(v_{j,\parallel})$ in die Rechnung ein. Es wird vielmehr so getan, als ob der Stoßpartner maxwellverteilt wäre. Folglich wird nur seine nach (2.9) gebildete thermische Geschwindigkeit berücksichtigt.
- Die Definition der reduzierten Verteilungen erfordert, daß sich Abhängigkeiten von v_{\perp} auf Potenzreihen in v_{\perp}^2 beschränken. Dies führt zu Reihenentwicklungen der Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j . Bei der Durchführung der Integration I_k liefern die Potenzen v_{\perp}^{2m} reduzierte Verteilungen F_m für alle $m \in \mathbb{N}$. Diese wurden durch die Gaußsche Näherung (2.13), (2.14) auf F_0 und F_1 zurückgeführt. Die Näherung gilt jedoch nur exakt, wenn sich die Abhängigkeit von v_{\perp} auf die Form $f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \tilde{f}(v_{\parallel}) \cdot \exp(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{\perp}^2})$ beschränkt, bei Abweichungen davon können Fehler auftreten.

Wenn die Verteilungsfunktionen beider Stoßpartner maxwellverteilt sind, dann gelten die hier gewonnenen Ergebnisse exakt. Eine gegenseitige Drift der Teilchensorten ist dabei durchaus zulässig, die obigen Formeln beziehen sich auf des Ruhesystem des Stoßpartners j . Das ist eine Folge des Ansatzes einer ruhenden Maxwellverteilung bei der Berechnung der Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j .

Im thermodynamischen Gleichgewicht sind alle Verteilungsfunktionen maxwellverteilt, so daß die hier hergeleiteten Formeln für den Coulomb – Stoßoperator exakt gelten. Dies ist eine bedeutende Eigenschaft, da das Verschwinden von $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$, wie in Abschnitt 4.1.1 dargelegt, eine wichtige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des numerischen Lösungsverfahrens der Vlasov – Gleichung für die $F_k(v_{\parallel})$ ist. Es ist sichergestellt, daß die Bedingung $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.} = 0$ nur durch die numerische Genauigkeit bei der Auswertung von (A.77) und nicht durch die in das Modell eingeflossenen Näherungen begrenzt wird.

A.3 Die Auswertung der Reihenentwicklungen

Wenn die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ und die Momente der Verteilungen der Stoßpartner bekannt sind, scheint der Coulomb – Stoßoperator nach (A.77) leicht bestimmbar zu sein. Der Vorfaktor Γ_j ist durch (A.2) und die Koeffizienten $l_{j,k}^h$ durch die Gleichungen (A.66) – (A.75) definiert.

Für die $l_{j,k}^h$ liegen aber keine einfach zu berechnenden analytischen Ausdrücke vor, sondern Potenzreihenentwicklungen in $(-x)^m \cdot (-y)^n$ mit dem x und y nach (A.54). Diese Reihen wurden hergeleitet, ohne daß dabei ihr durchaus problematisches Konvergenzverhalten untersucht wurde. Bevor nun näher auf die Konvergenz eingegangen wird, soll der mögliche Wertebereich der Parameter x und y abgeschätzt werden.

$x = \frac{V_1^2}{v_{j,th}^2}$ ist als das Quadrat des Verhältnisses der senkrechten thermischen Geschwindigkeit der untersuchten Teilchensorte zur isotropen thermischen Geschwindigkeit des betrachteten Stoßpartners definiert. Im thermodynamischen Gleichgewicht entspricht x damit dem Massenverhältnis $\frac{m_i}{m}$. Je nachdem, ob Stöße zwischen Protonen und schweren Ionen oder zwischen schweren Ionen und Protonen behandelt werden, kann x Werte der Größenordnung 10 oder 0.1 annehmen. Bei Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht weicht x vom Massenverhältnis ab, so daß auch für den Stoßprozeß einer Ionensorte mit sich selber je nach Temperaturanisotropie Werte $x > 1$ oder $x < 1$ auftreten können. Unter Berücksichtigung von Nichtgleichgewichtszuständen und der Tatsache, daß das Massenverhältnis deutlich größer als 10 werden kann, ergibt sich folgende Abschätzung für den Wertebereich von x :

$$0.01 < x < 100 \quad (\text{A.78})$$

y ist als das Verhältnis zwischen v_{\parallel}^2 und dem Quadrat der thermischen Geschwindigkeit des Stoßpartners, multipliziert mit einem Faktor $\frac{1}{2}$, definiert. Für $v_{\parallel} = 0$ ergibt sich damit $y = 0$. Nach oben hin wird y durch den Wertebereich der Stützstellen v_m im Geschwindigkeitsraum und durch das Massenverhältnis $\frac{m_i}{m}$ begrenzt. Wenn der Wertebereich im Geschwindigkeitsraum 20 thermische Geschwindigkeiten umfaßt, dann kann y maximal den Wert $\frac{1}{2} \cdot 400 \left(\frac{v_{th}}{v_{j,th}}\right)^2$ annehmen. Im thermodynamischen Gleichgewicht wird daraus $200 \frac{m_i}{m}$. Ein Wert von $v = 20v_{th}$ ist in der Übergangszone der Sonne durchaus realistisch, da der Wertebereich von v_{\parallel} groß genug sein muß, um auch wesentlich heißere koronale Verteilungen abzudecken. Wenn nun Stöße von Protonen an Eisenionen betrachtet werden, ergibt sich folgender Wertebereich für y :

$$0 < y < 10^4 \quad (\text{A.79})$$

Die Reihenentwicklungen in den Definitionen der $l_{j,k}^h$ müssen für alle (x, y) in diesem Wertebereich konvergieren. Als verschärfende Bedingung muß noch gefordert werden, daß die Konvergenz hinreichend rasch erfolgt, um eine numerische Summation mit vertretbarem Rechenaufwand zu ermöglichen.

A.3.1 Das Konvergenzproblem

Alle Gleichungen (A.66) – (A.75) enthalten Doppelreihen derselben Struktur:

$$r(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-y)^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} (-x)^m \quad (\text{A.80})$$

x und y sind als Verhältnisse von Geschwindigkeitsquadraten stets positiv. Die Koeffizienten a_{mn} verhalten sich für große m wie 1, m^{-1} oder m^{-2} und für große n wie 1 oder n^{-1} . Ansonsten haben sie die Größenordnung 1.

Die Konvergenz der Teilsumme über n ist aufgrund des Faktors $n!$ im Nenner für alle y gesichert. Gleichgültig, wie groß y ist, irgendwann „gewinnt“ die Fakultät. Das Quotientenkriterium liefert: $\left| \frac{(-y)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot \left(\left| \frac{(-y)^n}{n!} \right| \right)^{-1} = \frac{y}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Das a_{mn} wurde hier vernachlässigt, aber da es für große n nicht mit n anwächst, verschlechtert es die Konvergenz nicht.

Die Teilsumme über m verhält sich leider anders. Für $x < 1$ konvergiert die Reihe, für $x > 1$ divergiert sie jedoch. Das Quotientenkriterium besagt für das ungünstigste $a_{mn} = 1$: $\left| \frac{(-x)^{m+1}}{(-x)^m} \right| = x \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$. Es liegt also für $x < 1$ Konvergenz vor, für $x > 1$ Divergenz. Auch wenn sich a_{mn} für große m wie 1 oder m^{-1} verhält, ändert sich daran nichts.

Demnach scheint es unmöglich zu sein, die Gleichungen (A.66) – (A.75) für $x > 1$ auszuwerten und $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ zu berechnen. Dies erscheint merkwürdig, da die Reihenentwicklungen (A.23), (A.24) der Rosenbluth – Potentiale für alle $(v_{\parallel}, v_{\perp}, \beta)$ konvergieren. Diese Reihen enthalten noch einen Faktor $m!$ im Nenner, der die Konvergenz sicherstellt. Die Gaußsche Näherung für die reduzierte Verteilung F_m bringt nach (A.53) jedoch einen Faktor $m!$ in den Zähler, der die Fakultät im Nenner kompensiert.

Da die $l_{j,k}^h$ unabhängig von der Form der reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ sind, betreffen diese Konvergenzeigenschaften auch eine Maxwell- oder Bi-Maxwellverteilung, für die die Gaußsche Näherung exakt gilt. Daher kann ein durch die Gaußsche Näherung verursachter Fehler nicht die Ursache für die Divergenz der Reihe über m sein.

Aufgrund dieser Überlegung, und da davon auszugehen ist, daß der Coulomb – Stoßoperator tatsächlich einen endlichen, wohldefinierten Wert hat, könnte die Ursache für die Divergenz bei $x > 1$ in dem endlichen Konvergenzradius der hier verwendeten Reihen liegen und nicht darin, daß das Ergebnis nicht existiert.

Die Ursache des Konvergenzproblems

Dieser Sachverhalt kann durch folgendes Beispiel verdeutlicht werden. Ausgegangen wird von der Exponentialreihe

$$e^{-\beta(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m+n} \frac{1}{m!n!} v_{\parallel}^{2n} v_{\perp}^{2m} \quad (\text{A.81})$$

sowie von einer Bi-Maxwellverteilung

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = e^{-\frac{v_{\parallel}^2}{2V_{\parallel}^2} - \frac{v_{\perp}^2}{2V_{\perp}^2}} \quad (\text{A.82})$$

Es soll nun der Integraloperator I_0 auf das Produkt der Gleichungen (A.81)·(A.82) angewandt werden. Zuerst wird die linke Seite von (A.81) betrachtet, also die analytische Formel für die Exponentialfunktion. Die Integration liefert:

$$2\pi \int_0^\infty v_\perp e^{-\beta(v_\parallel^2 + v_\perp^2) - \frac{v_\parallel^2}{2V_\parallel^2} - \frac{v_\perp^2}{2V_\perp^2}} dv_\perp = e^{-\left(\beta + \frac{1}{2V_\parallel^2}\right)v_\parallel^2} \cdot \frac{2\pi}{2\beta + V_\perp^{-2}} \quad (\text{A.83})$$

Jetzt wird diese Rechnung für die Reihenentwicklung auf der rechten Seite von (A.81) durchgeführt. Es folgt:

$$2\pi \sum_n (-\beta)^n \frac{1}{n!} v_\parallel^{2n} \sum_m (-\beta)^m \frac{1}{m!} \int v_\perp^{2m+1} f(v_\parallel, v_\perp) dv_\perp = 2\pi \sum_n (-\beta)^n \frac{1}{n!} v_\parallel^{2n} \sum_m (-\beta)^m \frac{1}{m!} F_m(v_\parallel)$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} 2\pi F_0(v_\parallel) \sum_n (-\beta)^n \frac{1}{n!} v_\parallel^{2n} \sum_m (-2\beta V_\perp^2)^m$$

Die beiden Reihen bleiben separierbar, und es läßt sich die Exponentialreihe identifizieren. Ferner ist für $f(v_\parallel, v_\perp)$ nach Gl.(A.82) $F_0(v_\parallel) = V_\perp^2 \exp(-\frac{v_\parallel^2}{2V_\parallel^2})$. Das Ergebnis lautet damit:

$$2\pi e^{-\left(\beta + \frac{1}{2V_\parallel^2}\right)v_\parallel^2} \cdot V_\perp^2 \sum_{m=0}^\infty (-2\beta V_\perp^2)^m \quad (\text{A.84})$$

Damit liegen Ergebnisse für beide Seiten von (A.81) vor. Gleichsetzen liefert:

$$\frac{1}{1 + 2\beta V_\perp^2} = \sum_{m=0}^\infty (-2\beta V_\perp^2)^m \quad (\text{A.85})$$

Die aus der analytischen Lösung resultierende linke Seite der Gleichung existiert für alle möglichen Werte von $2\beta V_\perp^2$. Die rechte Seite basiert auf der Reihenentwicklung der Exponentialreihe $e^{-\beta v_\perp^2}$, die für alle $2\beta V_\perp^2$ konvergiert. Dennoch divergiert die rechte Seite für $2\beta V_\perp^2 \geq 1$.

Damit konnte das Problem der Konvergenz der Teilsummen über m in den Gleichungen (A.66) – (A.75) in diesem vereinfachten Fall reproduziert werden. Die Ursache der Divergenz liegt tatsächlich darin, daß der Konvergenzbereich der aus der Reihenentwicklung der Rosenbluth – Potentiale und der Gaußschen Näherung resultierenden Reihen kleiner als der Definitionsbereich der ursprünglichen Funktionen ist.

Doch auch die Summation über n ist nicht unproblematisch. Zwar wurde eingangs festgestellt, daß sie aufgrund des Faktors $\frac{1}{n!}$ für alle y konvergiert, doch können bei der Berechnung dieser Reihe erhebliche numerische Probleme auftreten.

Als Beispiel hierfür kann wieder die Exponentialreihe $e^{-y} = \sum_n \frac{1}{n!} (-y)^n$ dienen. Für große y strebt die Exponentialfunktion sehr rasch gegen Null, aber einzelne Summanden $\frac{1}{n!} (-y)^n$ können sehr große Werte annehmen. Das Ergebnis liegt dann in Form einer kleinen Differenz zwischen betragsmäßig sehr viel größeren Werten vor, was zu Problemen mit der nur endlichen Rechengenauigkeit führen kann. Für z.B. $y = 20$ ist $e^{-20} = 2.06 \cdot 10^{-9}$, aber für $n = 20$ ist $\frac{1}{n!} (-20)^n = 4.31 \cdot 10^7$. Zwischen dem Ergebnis und einzelnen Summanden liegt also ein Faktor der Größenordnung 10^{16} . Da die numerische Rechengenauigkeit typischerweise bei 10^{-14} liegt, ist es nicht möglich, e^{-20} numerisch mit Hilfe der Exponentialreihe zu berechnen.

A.3.2 Analytische Funktionen für die Reihen über $(-y)^n$

Die Beispiele für die Ursachen von Konvergenzproblemen in Abschnitt A.3.1 weisen gleichzeitig auf einen Lösungsansatz hin: Auch wenn die Reihenentwicklungen durch einen zu kleinen Konvergenzradius oder durch Probleme mit der Rechengenauigkeit numerisch nicht berechenbar sind, so existieren dennoch analytische Lösungen wie $\frac{1}{1+x}$ oder e^{-y} , die leicht auszuwerten sind. Daher soll versucht werden, die Reihen in (A.66) – (A.75) als Potenzreihenentwicklungen analytischer Funktionen zu identifizieren.

Dabei gibt es die beiden Möglichkeiten, zuerst die Summen über $(-x)^m$ oder über $(-y)^n$ durch analytische Funktionen zu ersetzen. Es erweist sich als vorteilhaft, zuerst die Summation über $(-y)^n$ zu betrachten. In diesem Fall kann die Summe über $(-x)^m$ leicht in die analytische Lösung integriert werden. Wenn dagegen zuerst die Summation über $(-x)^m$ behandelt wird, wie dies in Abschnitt A.3.3 geschieht, entstehen Ausdrücke, die von so komplizierter Struktur sind, daß die Summe über $(-y)^n$ nicht mehr mit Hilfe analytischer Funktionen berechenbar ist.

Die Identifikation von Entwicklungen analytischer Funktionen in den Reihen (A.66) – (A.75) erfolgt durch symbolische Summation mit Hilfe der Software *Mathematica*. Es soll darauf verzichtet werden, die Umformungen für alle 10 Reihen ausführlich aufzuschreiben. Die Rechnung wird nur exemplarisch für die Reihe (A.66) vorgestellt.

Die Auswertung mit *Mathematica* ergibt:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} y^{-(\frac{3}{2}+m)} \Gamma\left(\frac{3}{2}+m, 0, y\right) (-x)^m$$

Bei $\Gamma(\frac{3}{2}+m, 0, y)$ handelt es wieder um die unvollständige Gammafunktion nach (A.20):

$$\Gamma(a, z_0, z) = \int_{z_0}^z e^{-t} t^{a-1} dt$$

Diese Definition der unvollständigen Gammafunktion wird in die Reihe über m eingesetzt und die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht:

$$\sum_{m=0}^{\infty} y^{-(\frac{3}{2}+m)} \Gamma\left(\frac{3}{2}+m, 0, y\right) (-x)^m = y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{xt}{y}\right)^m dt$$

Die Summe im Integranden der Form $\sum_m (-s)^m$ kann als Reihenentwicklung der Funktion $\frac{1}{1+s}$ identifiziert werden. Diese Beziehung wird aufgrund der Überlegungen in Abschnitt A.3.1 für alle s eingesetzt, obwohl die Reihe nur für $s < 1$ konvergiert. Das so gewonnene Ergebnis lautet:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt \quad (\text{A.86})$$

Für die übrigen Reihen (A.67) – (A.75) verläuft die Rechnung völlig analog. Die Auswertung der Summation über n führt auf Reihen über unvollständige Gammafunktionen. Die Vertauschung von Summation und Integration liefert dann Reihen, die als Reihenentwicklungen analytischer Funktionen zu identifizieren sind. Dies führt auf Integraldarstellungen ähnlich der Gleichung

(A.86). Bei diesen Rechnungen kann auch auf vorherige Ergebnisse zurückgegriffen werden. Die Endergebnisse sind:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = -\frac{1}{2} y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt + \frac{e^{-y}}{1+x} + y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt \quad (\text{A.87})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = -y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt + \frac{1}{2} y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt \quad (\text{A.88})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} &= \frac{1}{4} y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt - \frac{e^{-y}}{2(1+x)} + \\ & y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt - y e^{-y} \frac{1}{1+x} - \\ & y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{5/2} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{4(n+m+1)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} &= \left(\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} \right) e^{-y} y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^2} dt + \\ & x^{-1/2} \int_0^y e^{-t} \arctan\left(\sqrt{\frac{xt}{y}}\right) dt - y^{-1/2} \int_0^y e^{-t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)(m+1)}{4(n+m+1)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} &= \left(\frac{\arctan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{x-2}{2(1+x)^2} \right) e^{-y} + y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^2} dt + \\ & \frac{1}{2} x^{-1/2} \int_0^y e^{-t} \arctan\left(\sqrt{\frac{xt}{y}}\right) dt - y^{-1/2} \int_0^y e^{-t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt - \\ & 2y^{-5/2} x \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^3} dt + \frac{1}{2} y^{-1/2} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^3} dt + \\ & \frac{3}{2} y^{-3/2} x \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^3} dt \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2-4(m-n)}{4(m+n+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} &= \left(\frac{2(x+2)}{x(1+x)} - 4 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x^{3/2}} \right) e^{-y} + 2y^{-5/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^2} dt + \\ & 2y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt + 4 \frac{y^{-1/2}}{x} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt - \\ & 4x^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \arctan\left(\sqrt{\frac{xt}{y}}\right) dt \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(4(n-m)-6)(m+1)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} &= -\frac{2e^{-y}}{(1+x)^2} + 4y^{-5/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^3} dt - \\ & 2y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{4(1+m)(1+2n)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} &= e^{-y} \left(\frac{1}{x(1+x)} + \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x^{3/2}} \right) - \\ & 4y^{-5/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1+\frac{xt}{y}\right)^3} dt + \frac{y^{-1/2}}{x} \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1+\frac{xt}{y}} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^2} dt - \\
& x^{-3/2} \int_0^y e^{-t} \arctan\left(\sqrt{\frac{xt}{y}}\right) dt
\end{aligned} \tag{A.94}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{4}{4(n+1)^2-1} + \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(4(m+2)(2+m-2n-2mn))}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \\
& \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{y}) + e^{-y} \left(\frac{1+16x+11x^2+4x^3}{2x(1+x)^3} - \frac{\arctan(\sqrt{x})}{2x^{3/2}} \right) - 12y^{-5/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^4} dt - \\
& y^{-5/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^2} dt - y^{-5/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt + y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{4}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^3} dt + \\
& y^{3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^2} dt + \frac{3}{2} y^{-3/2} \int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt + \frac{\sqrt{\pi} y^{-1/2}}{4x} \operatorname{erf}(\sqrt{y}) - \\
& \frac{1}{2x} e^{-y} - \frac{x^{-3/2}}{2} \int_0^y e^{-t} \arctan\left(\frac{xt}{y}\right) dt
\end{aligned} \tag{A.95}$$

Damit ist es gelungen, aus den numerisch problematischen Doppelreihen (A.66) – (A.75) analytische Ausdrücke zu gewinnen. In den Gleichungen (A.86) – (A.95) treten jedoch noch zahlreiche Integrale auf, für die keine analytischen Ausdrücke angebar sind. Es ist daher notwendig, sie numerisch zu berechnen.

Die numerische Berechnung der Integrale stößt zwar auf keine prinzipiellen Schwierigkeiten, aber sie ist mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. Immerhin sind 9 verschiedene Integrale auszuwerten. Da diese Integrale von y und somit von v_{\parallel} abhängig sind, muß die Rechnung für jede Geschwindigkeit v_{\parallel} und damit für jede Stützstelle (s_l, v_m) des Rechenfeldes neu durchgeführt werden.

Die Zurückführung auf zwei Integrale

Es wäre daher ein großer Vorteil, wenn sich diese Integrale, deren Struktur immerhin sehr ähnlich ist, auf eine geringere Zahl von einfachen Integralen zurückführen ließen. Tatsächlich ist mit Hilfe von *Mathematica* auf der Basis von partiellen Integrationen so eine Umformung möglich. Alle 9 in den Gleichungen (A.86) – (A.95) vorkommenden Integrale lassen sich durch 2 „Basisintegrale“ $I1$ und $I2$ ausdrücken:

$$I1 := \int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt \tag{A.96}$$

$$I2 := \int_0^y e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt \tag{A.97}$$

Das Integral $I1$ steht explizit in den Gleichungen (A.86) – (A.95). Die übrigen 8 Integrale lassen sich in folgender Weise auf $I1$ und $I2$ zurückführen:

$$\int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt = -\frac{y^{3/2}}{x} e^{-y} + \frac{y}{2x} \left(I2 + \left(\frac{x}{y} - 2 \right) \cdot I1 \right) \tag{A.98}$$

$$\int_0^y e^{-t} t^{5/2} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt = \frac{y^{3/2}}{2x^2} e^{-y} (-3x + 2y - 2xy) + \frac{1}{4x^2} (I1 \cdot (3x^2 - 2xy + 4y^2) + I2 \cdot (3xy - 2y^2)) \quad (\text{A.99})$$

$$\int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^2} dt = -\frac{y^{3/2}}{x(1+x)} e^{-y} + \frac{y}{2x} (I2 - 2 \cdot I1) \quad (\text{A.100})$$

$$\int_0^y e^{-t} \arctan\left(\sqrt{\frac{xt}{y}}\right) dt = -\arctan(\sqrt{x}) e^{-y} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot I2 \quad (\text{A.101})$$

$$\int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^3} dt = -\frac{y^{5/2}}{4x^3(1+x)^2} e^{-y} (3x + 5x^2 + 2y + 2xy) + \quad (\text{A.102})$$

$$\frac{y^2}{8x^3} (I2 \cdot (3x + 2y) - I1 \cdot (10x + 4y))$$

$$\int_0^y e^{-t} \sqrt{t} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^3} dt = -\frac{y^{3/2}}{4x^2(1+x)^2} e^{-y} (-x + x^2 + 2y + 2xy) + \quad (\text{A.103})$$

$$\frac{y}{8x^2} (I2 \cdot (x - 2y) + I1 \cdot (2x + 4y))$$

$$\int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^2} dt = \frac{y^{5/2}}{x^2(1+x)} e^{-y} + \frac{y}{2x^2} (I1 \cdot (2x + 2y) - I2 \cdot y) \quad (\text{A.104})$$

$$\int_0^y e^{-t} t^{3/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{xt}{y}\right)^4} dt = \frac{y^{5/2}}{24x^4(1+x)^3} e^{-y} (-3x^2 - 8x^3 + 3x^4 + 12xy +$$

$$28x^2y + 16x^3y + 4y^2 + 8xy^2 + 4x^2y^2) +$$

$$\frac{y^2}{48x^4} (I2 \cdot (3x^2 - 12xy - 4y^2) +$$

$$I1 \cdot (6x^2 + 32xy + 8y^2)) \quad (\text{A.105})$$

Diese Beziehungen können nun dazu verwendet werden, die Gleichungen (A.86) – (A.95) zu vereinfachen. Durch Einsetzen erhält man die folgenden Ergebnisse für die Doppelreihen in den Gleichungen (A.66) – (A.75):

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = y^{-3/2} \cdot I1 \quad (\text{A.106})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = -\frac{e^{-y}}{x(1+x)} - \frac{I1}{x\sqrt{y}} + \frac{I2}{2x\sqrt{y}} \quad (\text{A.107})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \frac{e^{-y}}{x} + \frac{I1}{x\sqrt{y}} - \frac{I2}{2x\sqrt{y}} \quad (\text{A.108})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \frac{(x-2y)e^{-y}}{2x^2(1+x)} - \frac{I1}{x\sqrt{y}} \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{x}\right) - \frac{I2}{2x\sqrt{y}} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{x}\right) \quad (\text{A.109})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{4(n+m+1)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = -\frac{e^{-y}}{x} - \frac{I1}{\sqrt{y}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{I2}{2\sqrt{y}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (\text{A.110})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)(m+1)}{4(n+m+1)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \frac{e^{-y}}{x} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{x}\right) + \frac{I1}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2x} + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x}\right) +$$

$$\frac{I_2}{2\sqrt{y}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x} \right) \quad (\text{A.111})$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2-4(m-n)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \frac{2e^{-y}}{x^2} + \frac{I_1}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} \right) - \frac{I_2}{x\sqrt{y}} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \quad (\text{A.112})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(4(n-m)-6)(m+1)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = & -\frac{e^{-y}}{x(1+x)} \cdot \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{2y}{x^2} + \frac{2y}{x} \right) - \\ & \frac{I_1}{\sqrt{y}(1+x)} \left(2 + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x} + \frac{2y}{x^3} + \frac{4y}{x^2} + \frac{2y}{x} \right) + \\ & \frac{I_2}{\sqrt{y}x(1+x)} \left(\frac{3}{2x} + \frac{3}{2} + \frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x} + y \right) \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} -\frac{4(1+m)(1+2n)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = & \frac{e^{-y}}{x^2} \cdot \left(3 + \frac{2y}{x} \right) + \frac{I_1}{x\sqrt{y}} \left(\frac{5}{x} + 3 + \frac{2y}{x^2} + \frac{2y}{x} \right) - \\ & \frac{I_2}{2\sqrt{y}} \left(\frac{3}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{4}{4(n+1)^2-1} + \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{4(m+2)(2+m-2n-2mn)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m \frac{(-y)^n}{n!} = \\ \frac{e^{-y}}{x(1+x)} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} - \frac{6y}{x^2} - \frac{4y}{x} - \frac{2y^2}{x^3} - \frac{2y^2}{x^2} \right) + \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}x} \left(\frac{1}{y} - \frac{3}{2} \right) + \\ I_1 \cdot \left(-\frac{y^{-5/2}}{2} + \frac{3y^{-3/2}}{4} - \frac{(5+x)y^{-1/2}}{2x^2} - \frac{4(2+x)y^{1/2}}{x^3} - \frac{2(1+x)y^{3/2}}{x^4} \right) + \\ I_2 \cdot \left(-\frac{y^{-3/2}}{2x} + \frac{(2x-1)y^{-1/2}}{4x^2} + \frac{(3+x)y^{1/2}}{x^3} + \frac{(1+x)y^{3/2}}{x^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

Mit diesen Formeln ist es möglich, die Koeffizienten $l_{j,k}^h$ und damit den Coulomb – Stoßoperator (A.77) für die reduzierten Verteilungsfunktionen $F_0(v_{\parallel})$ und $F_1(v_{\parallel})$ zu berechnen. Es gibt keine Reihenentwicklung mehr, wodurch der Rechenaufwand trotz der komplizierten Struktur von (A.106) – (A.115) vermindert und Konvergenzprobleme vermieden werden. Diese Gleichungen erlauben eine Berechnung des Stoßintegrals mit hoher Genauigkeit.

Da die Gleichungen (A.106) – (A.115) Potenzen von x und y im Nenner aufweisen, soll kurz auf den Fall kleiner x und y eingegangen werden. Zunächst zu kleinen x . Die höchste vorkommende negative Potenz ist x^{-3} . Da bereits festgestellt wurde, daß x nicht kleiner als 10^{-4} werden kann, erscheint dies vertretbar, zumal hohe Potenzen von x im Nenner stets in Verbindung mit einem Faktor y im Zähler auftreten. Aufgrund der Definition von x und y nach (A.54) nehmen auch die y betragsmäßig kleine Werte an, wenn x sehr klein ist. Der Fall $x = 0$ ist aufgrund der Definition als Quadrat des Verhältnisses von thermischen Geschwindigkeiten ausgeschlossen.

Bei kleinen y ist die Situation etwas anders. Zwar kann man zeigen, daß alle Ausdrücke für $y \rightarrow 0$ endliche Werte behalten, doch entstehen dabei Terme des Typs $\frac{0}{0}$. Der Grenzfall $y \rightarrow 0$ kann daher nicht mit den Formeln (A.106) – (A.115) erfaßt werden, sondern erfordert eine besondere Behandlung. Doch zuvor wird noch auf die numerische Bestimmung der Integrale I_1 und I_2 eingegangen.

Die numerische Bestimmung der beiden Integrale

Mit den Gleichungen (A.106) – (A.115) ist es gelungen, analytische Ausdrücke für die Reihenentwicklungen (A.66) – (A.75) zu formulieren. Diese enthalten aber immer noch die beiden

Integrale $I1$ und $I2$ nach (A.96) und (A.97). Es lassen sich keine analytischen Lösungen für diese Integrale angeben, so daß eine numerische Berechnung notwendig ist.

Eine naheliegende Vorgehensweise zur Berechnung dieser Integrale ist, eine endliche Zahl von Stützstellen auf dem Intervall $[0, y]$ zu verteilen, die beiden Integranden an diesen Stützstellen zu berechnen und eine bekannte Quadraturformel wie z.B. die Simpson – Formel zu verwenden. Eine genauere Betrachtung der Integranden zeigt jedoch, daß dieser Ansatz numerische Probleme aufweisen kann.

Damit eine numerische Integration eine hohe Genauigkeit hat, sollte der Funktionsverlauf des Integranden möglichst glatt sein. Scharfe Maxima dagegen erfordern eine hohe Stützstellenzahl (und entsprechenden numerischen Aufwand), oder es entsteht ein erheblicher Diskretisierungsfehler. Der Integrand von $I1$ ist $e^{-t}\sqrt{t}(1 + \frac{xt}{y})^{-1}$. Diese Funktion hat an der Stelle $t = 0$ den Wert 0, steigt zunächst wie \sqrt{t} , erreicht noch für $t < 1$ ein Maximum und geht dann bedingt durch die Exponentialfunktion (und den Bruch) rasch gegen 0. Der Integrand von $I2$ hat an der Stelle $t = 0$ sogar eine Singularität ($t^{-1/2}$). Die Funktion ist zwar trotzdem integrierbar, die Singularität bereitet aber numerische Probleme.

Es ist zwar nicht möglich, analytische Ausdrücke für die Integrale $I1$ und $I2$, d.h. für Integrationen von 0 bis y , anzugeben, wohl aber für Integrationen von 0 bis ∞ . Daher bietet es sich an, $I1$ und $I2$ als Differenz von Integrationen von 0 bis ∞ und Integrationen von y bis ∞ darzustellen:

$$I1 = \frac{y\sqrt{\pi}}{x} - \frac{y\sqrt{\pi} \cdot \sigma(x/y)}{x} - \int_y^\infty e^{-t}\sqrt{t} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt \quad (\text{A.116})$$

$$I2 = \sqrt{\pi} \cdot \sigma(x/y) - \int_y^\infty e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1 + \frac{xt}{y}} dt \quad (\text{A.117})$$

Dabei ist:

$$\sigma(a) = e^{1/a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) \right) \quad (\text{A.118})$$

Diese Umformung von $I1$ und $I2$ erlaubt besonders bei größeren y eine erheblich genauere Bestimmung der Integrale. Bei größeren y wird zum einen der für den Funktionsverlauf des Integranden kritische Bereich $y < 1$ aus der numerischen Integration herausgelassen, andererseits bewirkt der Faktor $\exp(-t)$, daß der Integrand im numerischen Integrationsbereich sehr klein wird. Daher ist der Beitrag der numerisch zu bestimmenden Integrale zu $I1$ und $I2$ nur gering, so daß der Einfluß der dabei gemachten Fehler entsprechend verkleinert wird. Die Ausdehnung des Integrationsbereichs ins Unendliche ist auch kein Problem. So gilt an der Stelle $t = 30$: $\exp(-t) \cdot \sqrt{t} \approx 5 \cdot 10^{-13}$. Der Faktor $(1 + \frac{xt}{y})$ verkleinert den Ausdruck noch weiter. Wenn die Integration also an dieser Stelle abgebrochen wird, liegt der dabei entstehende Fehler im Bereich der numerischen Genauigkeit und ist völlig vernachlässigbar.

Bei kleinen $y \rightarrow 0$ nützen die Formeln (A.116) und (A.117) dagegen wenig. Da der Bereich, über den sich die numerische Integration erstreckt, vergrößert wird, verschlechtert sich das Ergebnis sogar gegenüber (A.96) und (A.97) bei gleicher Stützstellenzahl. Es wurde jedoch bereits festgestellt, daß die analytischen Formeln (A.106) – (A.115) für kleine y nicht anwendbar sind. Daher entfällt das Problem, die Integrale (A.96) und (A.97) für kleine y auszuwerten.

Abschließend noch eine Bemerkung zu der Funktion $\sigma(a)$, wie sie in Gleichung (A.118) definiert ist. Hier ist $a = \frac{x}{y}$. Für sehr kleine a (d.h. hohe Geschwindigkeiten) kann der Vorfaktor $e^{1/a}$ sehr große Werte annehmen. Andererseits nähert sich die Fehlerfunktion mit wachsendem $a^{-1/2}$ immer mehr der 1 an. Hierbei entsteht die numerisch äußerst problematische Situation, daß das Ergebnis in Form einer kleinen Differenz zwischen um etliche Größenordnungen höheren Werten vorliegt. Tatsächlich verhält sich die Differenz $1 - \operatorname{erf}(a^{-1/2})$ für kleine a wie $e^{-1/a}$, sie kompensiert den großen Vorfaktor also. Es gilt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sigma(a) = 1$$

Aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit kann $\sigma(a)$ für kleine a nicht mit Hilfe von Gleichung (A.118) bestimmt werden. Da es sich hier aber nur um eine Funktion einer einzigen Veränderlichen handelt, ist es möglich und sinnvoll, die kritischen Werte $a < 0.2$ mit Hilfe der beliebig hohen Rechengenauigkeit von *Mathematica* zu berechnen.

Hierzu wurden im Intervall $[0, 0.2]$ die Werte $\sigma(a)$ auf 100 Stützstellen berechnet und die Werte tabelliert. Zwischen den Stützstellen wird quadratisch interpoliert. Durch die Tabellierung nicht der Werte selber, sondern deren Logarithmen ließ sich die Genauigkeit nochmals steigern. Auf diese Weise können die $\sigma(a)$ in diesem Bereich mit einem relativen Fehler von weniger als 10^{-5} bestimmt werden.

A.3.3 Die Behandlung kleiner y

Bei der Herleitung der analytischen Formeln (A.106) – (A.115) für die Potenzreihenentwicklungen (A.66) – (A.75) der Parameter $l_{j,k}^h$ in Abschnitt A.3.2 wurde festgestellt, daß die Ergebnisse nicht für kleine $y \rightarrow 0$ anwendbar sind. Für kleine y muß folglich ein anderer Weg zur Berechnung der Reihen (A.66) – (A.75) gefunden werden.

Alle Reihen sind von derselben Struktur (A.80) mit Summanden $a_{mn}(-y)^n/n!$. Da sich die Koeffizienten a_{mn} mit n nur wie 1 oder n^{-1} verändern, konvergiert die Summe über alle n genau wie die Exponentialreihe für alle y . Die Notwendigkeit, die Reihen durch analytische Funktionen zu ersetzen, ergibt sich nach Abschnitt A.3.1 durch das numerisch problematisch große Verhältnis zwischen einzelnen Reihengliedern und dem Wert, gegen den die Reihe konvergiert. Dies wurde am Beispiel der Exponentialreihe für $y = 20$ vorgeführt.

Bei kleinen y tritt das Problem jedoch nicht auf, analog zu Abschnitt A.3.1 weist die Exponentialreihe für $y = 5$ den betragsmäßig größten Summanden $(-5)^5/5! = -26.04$ auf, während das Ergebnis $e^{-5} = 6.7 \cdot 10^{-3}$ ist. Es liegt nur ein Faktor von etwa 4000 zwischen dem Ergebnis und dem größten Summanden, so daß das Resultat der numerischen Summation bei einer Rechengenauigkeit von 10^{-14} eine relative Genauigkeit von 10^{-11} aufweist. Mit abnehmendem y nimmt die Genauigkeit weiter zu.

Der Faktor $n!$ im Nenner der Summanden sorgt außerdem für eine rasche Konvergenz der Summation, so daß es sinnvoll ist, die Summation über $(-y)^n$ für kleine y numerisch durchzuführen. Da der damit verbundene Rechenaufwand größer als bei der Anwendung der analytischen Formeln ist, und letztere bei $y = 2$ immer noch sehr gute Resultate liefern, wird nur für $y < 2$ direkt über $(-y)^n$ summiert.

Wenn die Summe über $(-x)^m$ bei einer Reihe $r(x, y)$ der Form (A.80) in Koeffizienten

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} (-x)^m \quad (\text{A.119})$$

zusammenfaßt wird, dann ergibt sich:

$$r(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (-y)^n \quad (\text{A.120})$$

Es ist bemerkenswert, daß nach der Definition (A.54) von x und y nur y von der Geschwindigkeit v_{\parallel} abhängt, während x mit Hilfe der Momente der reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ und des Stoßpartners berechnet wird. Dadurch nimmt y auf jeder Stützstelle (s_l, v_m) im Rechenfeld einen anderen Wert an, x dagegen ändert sich nur mit der Höhe s_l . Aufgrund der Definition (A.119) weisen auch die Koeffizienten b_n von der Geschwindigkeit v_{\parallel} unabhängige Werte auf, so daß es ausreicht, die b_n für eine gegebene Höhe s_l im Rechenfeld zu bestimmen und ihre Werte zur Berechnung der Summe (A.120) für alle Geschwindigkeiten und damit y zu verwenden. Für jede Stelle (s_l, v_m) im Rechenfeld gehen die Doppelsummen der Form (A.80) so in einfache Summen (A.120) über, wodurch der Rechenaufwand erheblich vermindert wird.

Analytische Funktionen für die Reihen über $(-x)^m$

Die Berechnung der b_n nach (A.119) stößt auf dieselbe Schwierigkeit wie die Auswertung der Doppelsummen in Abschnitt A.3.1. Für $x > 1$ divergieren die Reihen, so daß eine Bestimmung der b_n durch numerische Summation nicht möglich ist. Die Ursache dafür liegt nach A.3.1 in der Ersetzung des wirklichen funktionalen Zusammenhangs durch eine Potenzreihenentwicklung mit begrenztem Konvergenzradius. Das Problem kann dadurch gelöst werden, daß die Reihen über $(-x)^m$ mit Hilfe der Software *Mathematica* analog zu Abschnitt A.3.2 als Potenzreihenentwicklungen analytischer Funktionen identifiziert werden.

Wenn bei diesem Vorgang der Index n als Variable in den Summanden steht, dann werden als Ergebnis lediglich "hypergeometrische Funktionen" gefunden, die eine weitere analytische Behandlung erschweren. Daher ist es notwendig, die Summationen über m für $n = 0, 1, 2, \dots$ durchzuführen und nach Gesetzmäßigkeiten zu suchen. Die so gefundenen Formeln werden anschließend dadurch geprüft, daß mit ihnen die Resultate für weitere n vorhergesagt werden.

Auf diese Weise ergeben sich für die Summen über $(-x)^m$ in den Gleichungen (A.66) – (A.75) die folgenden analytischen Formeln:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2(m+n)+3} (-x)^m = \frac{2(-1)^n}{x^{n+1}} \left(\left(\sum_{l=0}^n \frac{(-x)^l}{2l+1} \right) - \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) \quad (\text{A.121})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m = -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{(2n+1)(-1)^n}{x^{n+1}} \left(\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \sum_{l=0}^n \frac{(-x)^l}{2l+1} \right) \quad (\text{A.122})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2(m+n)+3} (-x)^m = \frac{(2n+1)(-1)^n}{x^{n+1}} \left(\left(\sum_{l=0}^n \frac{(-x)^l}{2l+1} \right) - \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) \quad (\text{A.123})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n-1)(m+1)}{2(m+n)+3} (-x)^m = -\frac{2n-1}{2x(1+x)} + \frac{(4n^2-1)(-1)^n}{2x^{n+1}} \left(\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \sum_{l=0}^n \frac{(-x)^l}{2l+1} \right) \quad (\text{A.124})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{4(n+m+1)^2-1} (-x)^m = \frac{2n+1}{x^{n+1}} \left(\frac{(1+x) \arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - 1 + 2 \cdot \sum_{l=1}^n \frac{(-x)^l}{4l^2-1} \right) \quad (\text{A.125})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)(m+1)}{4(n+m+1)^2-1} (-x)^m &= \frac{2n+1}{4x^{n+1}} (-1)^{n+1} \left(\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{8(n-l)}{4l^2-1} (-x)^l \right) + 2((2n+1) \right. \\ &\quad \left. + x(2n-1)) \cdot \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + 2(2n-1) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-4(m-n)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m &= \frac{2}{x^{n+2}} (-1)^n \left((2n+3) - \left(\sum_{l=0}^n \frac{4n-2l+3}{4l^2+8l+3} (-x)^{l+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - ((2n+3) + x(2n+2)) \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.127})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(n-m)-6(m+1)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m &= \frac{1}{x(1+x)} + \frac{(-1)^n}{x^{n+2}} \left(((4(n+1)^2-1) + x(2n(2n+1))) \right. \\ &\quad \left. \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - (4(n+1)^2-1) + \sum_{l=1}^n \frac{(-x)^l}{4l^2-1} (3-6l+10n-12ln+8n^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(1+m)(1+2n)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m &= \frac{2n+1}{x^{n+2}} (-1)^{n+1} \left(4 \left(\sum_{l=1}^n \frac{(-x)^l (n+1-l)}{4l^2-1} \right) + ((2n+3) + \right. \\ &\quad \left. x(2n+1)) \cdot \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - (2n+3) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.129})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(m+2)(2+m-2n-2mn)}{4(n+m+2)^2-1} (-x)^m &= \frac{(-1)^n}{x^{n+2}} \left(((2n+1)(4n^2+4n-1) + x(2n-1)(4n^2+1)) \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\arctan(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{(2n+1)(4n^2+4n-1)}{2} + \sum_{l=1}^{n+1} \frac{(-x)^l}{4l^2-1} (-1+2n+4n^2-16ln^2+8n^3) \right) - \frac{2n-1}{1+x} \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

Die so gewonnenen Werte für die Summen über $(-x)^m$ entsprechen den jeweiligen b_n nach Gl. (A.119). Mit den Gleichungen (A.121) – (A.130) ist es gelungen, die unendlichen Reihen über m nach (A.66) – (A.75) mit ihrer Divergenz für $x > 1$ durch analytische Funktionen und endliche Summen auszudrücken.

Diese Ergebnisse bereiten für große x keine numerischen Probleme. Es treten zwar Summen der Form $\sum_{l=0}^n (-x)^l$ auf, bei denen Differenzen sehr großer Zahlen gebildet werden. Es kann durchaus vorkommen, daß Summanden $(-x)^l$ so groß werden, daß $(-x)^0 = 1$ durch die begrenzte Rechengenauigkeit nicht mehr auflösbar ist. Da jedoch eine endliche Summe vorliegt, kann kein Abbruchfehler entstehen, im Gegensatz zur Summation über n in (A.66) – (A.75). Außerdem wachsen die Summanden betragsmäßig streng monoton mit l an. Der Summand für $l = n$ hat daher den größten Betrag und bestimmt so die Größenordnung des Ergebnisses. Der numerisch problematische Fall, daß das Ergebnis als kleine Differenz zwischen großen Werten berechnet wird, tritt hier nicht ein. Daher entspricht die Genauigkeit dieser Summen praktisch der vollen Rechengenauigkeit.

Die Arcustangensfunktion verhält sich bei großen x durch Konvergenz gegen $\frac{\pi}{2}$ ebenfalls unproblematisch, und hinreichend hohe Potenzen von x im Nenner der Vorfaktoren der Ausdrücke (A.121) – (A.130) stellen sicher, daß die Ergebnisse für große x gegen 0 streben.

Damit erlauben die Formeln (A.121) – (A.130) auch bei großen x eine genaue Bestimmung der Summen über $(-x)^m$. Bei kleinen x werden sie dagegen problematisch. Sie weisen Potenzen von $x^{-(n+2)}$ im Nenner auf und werden daher für $x \rightarrow 0$ singulär. Aus diesem Grund ist es nicht sinnvoll, sie für $x < 1$ zu verwenden, da die b_n nach (A.119) mit n rasch anwachsen und die Konvergenz von (A.120) verschlechtern.

Der Grund für die Einführung der analytischen Formeln (A.121) – (A.130) war die Divergenz der Reihen (A.119) für $x \geq 1$. Für $x < 1$ konvergieren sie dagegen. Demnach ist es sinnvoll, die Summation (A.119) für $x < 1$ direkt durchzuführen und für $x > 1$ die Gleichungen (A.121) – (A.130) zu verwenden.

Reihen über $(-x)^m$ mit verbesserter Konvergenz

Bei der numerischen Summation (A.119) für $x < 1$ tritt das Problem auf, daß die Reihe für $x \approx 1$ nur sehr langsam konvergiert. Die Koeffizienten a_{mn} unterstützen die Konvergenz nicht, einige streben für $m \rightarrow \infty$ endlichen Werten zu. Für $x \xrightarrow{x < 1} 1$ werden dadurch beliebig viele Summanden notwendig, um eine vorgegebene numerische Genauigkeit zu erzielen.

Die Ursache dieses Verhaltens ist die schon bei $x = 1$ eintretende Divergenz der Reihe. Wie in Abschnitt A.3.1 erläutert, basiert diese Divergenz auf der Ersetzung analytischer Funktionen durch Potenzreihenentwicklungen mit einem Konvergenzradius, der wesentlich kleiner als der Definitionsbereich der Funktionen ist. Durch die Wahl einer anderen Form der Reihenentwicklung kann der Konvergenzradius jedoch variiert werden. Für die Reihen (A.119) wurde eine Form gefunden, die für alle x konvergiert. Diese Umformung soll nun vorgestellt werden.

In einem ersten Schritt wird die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m$ mit einem Faktor $(1+x)$ multipliziert:

$$\begin{aligned} (1+x) \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m + x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m = a_{0,n} - x \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}(-x)^{m-1} + x \cdot \\ &\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m = a_{0,n} - x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (a_{m+1,n} - a_{m,n})(-x)^m \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m = \frac{1}{1+x} \cdot \left(a_{0,n} - x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (a_{m+1,n} - a_{m,n})(-x)^m \right) \quad (\text{A.131})$$

Dieser Ausdruck enthält immer noch eine Summe über $(-x)^m$, die für $x \geq 1$ divergieren kann. Mit $a'_{m,n} := a_{m+1,n} - a_{m,n}$ wird die Gleichung (A.131) erneut angewandt:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m = \frac{1}{1+x} \cdot \left(a_{0,n} - \frac{x}{1+x} (a_{1,n} - a_{0,n}) + \frac{x^2}{1+x} \sum_{m=0}^{\infty} (a'_{m+1,n} - a'_{m,n})(-x)^m \right)$$

Auch hier gibt es noch eine Summe mit $(-x)^m$, setze daher $a''_{m,n} := a'_{m+1,n} - a'_{m,n}$, wende die Gleichung (A.131) erneut an usw.. Iterativ ergibt sich auf diese Weise die folgende Formel:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(-x)^m = \frac{1}{1+x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k a_{k,n} \quad (\text{A.132})$$

Damit ist es gelungen, die ursprüngliche Summe mit $(-x)^m$ in eine Summe mit $\frac{x}{1+x} < 1$ umzuformen. Große x können die Konvergenz jetzt nicht mehr verhindern. Allerdings scheint diese Umformung mit einer erheblichen Zunahme des Rechenaufwands verbunden zu sein, da aus einer Reihe eine Doppelsumme geworden ist. Eine genauere Betrachtung der Terme

$$b_{m,n} := \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k a_{k,n} \quad (\text{A.133})$$

zeigt jedoch, daß das nicht der Fall ist. Diese $b_{m,n}$ enthalten lediglich die Konstanten $a_{m,n}$, wie sie in den Reihen (A.66) – (A.75) stehen. Sie sind unabhängig von der Variablen v_{\parallel} , den Verteilungsfunktionen der verschiedenen Teilchensorten, deren Momenten oder sonstigen Teilcheneigenschaften. Daher ist es nur notwendig, sie einmalig zu berechnen, ihre Werte können anschließend bei jeder Berechnung der Coulomb – Stöße verwendet werden.

Es bietet sich an, zu dieser einmaligen Rechnung *Mathematica* zu verwenden, da mit diesem Programm Rechnungen mit beliebig hoher Genauigkeit möglich sind. Dies ist aufgrund der großen Werte, die die Binomialkoeffizienten annehmen können, ratsam. Die so berechneten Werte für die $b_{m,n}$ können tabelliert werden. Die Berechnung der Reihen erfolgt dann durch:

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} (-x)^m = \frac{1}{1+x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^m b_{m,n} \quad (\text{A.134})$$

Aufgrund der Definition (A.133) der $b_{m,n}$ mit den Binomialkoeffizienten könnte befürchtet werden, daß sie mit m stark, im Extremfall wie $m!$ anwachsen, und so die Konvergenz von (A.134) verhindern. Es zeigt sich aber, daß die $b_{m,n}$ für festes n mit wachsendem m abnehmen. Für $n > 5$ konvergieren sie sehr rasch gegen 0, für kleinere n , speziell $n = 0$, langsamer. Sie wachsen aber in keinem Fall bei großen m mit m an. Daher kann es nicht passieren, daß die Konvergenz der Reihe (A.134) durch das Verhalten der $b_{m,n}$ begrenzt wird. Da $\frac{x}{1+x} < 1$ für alle x ist, ist die Konvergenz der Reihe (A.134) gesichert. Damit ist es gelungen, die Summation über m in eine stets konvergente Form zu bringen.

Numerisch können bei kleinen n , speziell bei $n = 0$, Probleme auftreten. Denn wenn x groß wird, dann ist $\frac{x}{1+x} \approx 1$, und die Potenzen $(\frac{x}{1+x})^m$ streben nur sehr langsam gegen 0. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe (A.134) hängt dann im wesentlichen von der Geschwindigkeit ab, mit der die $b_{m,n}$ bei festem n gegen 0 gehen. Bei kleinen n erfolgt dies, wie schon erwähnt, nur sehr langsam. Es können aber nur endliche viele Werte $b_{m,n}$ tabelliert werden. Es wurden Rechnungen bis zu $m = 700$ durchgeführt, die $b_{m,n}$ sanken im Extremfall dabei nur um einen Faktor 20 ab.

Daher ist die Formel (A.134) für große x trotz ihrer theoretisch vorhandenen Konvergenz nicht geeignet. Es bleibt dabei, daß die analytischen Gleichungen (A.121) – (A.130) für $x \geq 1$ verwendet werden. Für $x < 1$ ist $\frac{x}{1+x} < \frac{1}{2}$, so daß eine hinreichend rasche Konvergenz von (A.134) gesichert ist.

A.4 Zusammenfassung

Das in diesem Anhang vorgestellte Verfahren zur Berechnung der Coulomb – Stöße für reduzierte Verteilungsfunktionen $F_k(v_{\parallel})$ basiert auf der Anwendung des Integraloperators I_k nach

(2.16) auf den Coulomb – Stoßoperator (A.1) für Verteilungsfunktionen $f(\vec{v})$ und anschließender Ersetzung der $f(\vec{v})$ durch die $F_k(v_{\parallel})$ nach Definition (2.2).

Da die Rosenbluth – Potentiale G_j und H_j nach (A.5), (A.6) durch Integrale über die Verteilungsfunktion $f_j(\vec{v}_j)$ des Stoßpartners berechnet werden, ist es zuerst notwendig, die Integrationen $\int d^3\vec{v}_j$ in Integrale $\int dv_{j,\parallel}$ über die reduzierten Verteilungen umzuwandeln. Es stellt sich jedoch heraus, daß das Vorkommen der Geschwindigkeitsdifferenz $|\vec{v} - \vec{v}_j|$ in den Integranden eine analytische Lösung der Integrale verhindert. Da die reduzierten Verteilungen $F_{j,k}(v_{j,\parallel})$ nicht eingeführt werden können, ist es notwendig, die Verteilungsfunktion der Stoßpartner $f_j(\vec{v}_j)$ durch eine geeignete Modellverteilung zu ersetzen. Doch selbst für eine Bi-Maxwellverteilung sind die Rosenbluth – Potentiale nicht analytisch berechenbar.

Erst nach der Ersetzung der Verteilungsfunktion des Stoßpartners durch eine ruhende Maxwellverteilung gleicher Dichte und Temperatur konnten die analytischen Ausdrücke (A.18), (A.19) für die Rosenbluth – Potentiale gefunden werden. Daß die Modellverteilung die Driftgeschwindigkeit Null aufweist, stellt keine Einschränkung dar, da die Berechnung des Coulomb – Stoßoperators im Ruhesystem des jeweiligen Stoßpartners j erfolgen kann. Der Ansatz (A.1) einer Summation über die Wirkung der Stöße mit verschiedenen Stoßpartnern j ermöglicht die dazu notwendige getrennte Behandlung der verschiedenen j , im Gegensatz zu dem in Abschnitt 2.4.1 erwähnten Ansatz, bei dem die Wirkung aller Stoßpartner in einem gemeinsamen Satz von Rosenbluth – Potentialen G und H zusammengefaßt wird. Der Ansatz maxwellverteilter Stoßpartner ist auch physikalisch zu begründen, da sich die Verteilungsfunktionen in Bereichen, in denen die Coulomb – Stöße nicht völlig vernachlässigbar sind, zumindest in ihrem Kern nicht weit von einer Maxwellverteilung entfernen können.

Damit die reduzierten Verteilungen $F_k(v_{\parallel})$ bei der mit dem Operator I_k verbundenen Integration über v_{\perp} entsprechend ihrer Definition (2.2) eingeführt werden können, ist es notwendig, daß sich die Abhängigkeit der Rosenbluth – Potentiale von v_{\perp} auf Potenzen von v_{\perp}^2 beschränkt. In der Form (A.18), (A.19) treten jedoch komplizierte Funktionen von $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$ auf. Daher werden die Rosenbluth – Potentiale in Potenzreihen entwickelt, nach einer Änderung der Summationsreihenfolge ergeben sich die Reihen (A.66) – (A.75). Damit ist die Herleitung eines Coulomb – Stoßoperators (A.77) für reduzierte Verteilungsfunktionen mit den durch Reihenentwicklungen definierten Koeffizienten $l_{j,k}^h$ abgeschlossen.

Die Berechnung der Reihenentwicklungen bereitet jedoch noch Schwierigkeiten. Es handelt sich dabei um Doppelreihen der Form (A.80) in den Parametern x und y nach (A.54), wobei x als Verhältnis thermischer Geschwindigkeiten nur von Momenten der Verteilungen abhängig und y eine normierte Geschwindigkeit $v_{\parallel}^2/(2v_{j,th}^2)$ ist. Eine direkte numerische Berechnung der Reihen kann aufgrund von Konvergenzproblemen bei den Summationen über $(-x)^m$ und Problemen mit der endlichen numerischen Genauigkeit bei $(-y)^n$ nicht durchgeführt werden.

Es ist gelungen, die Reihen als Potenzreihenentwicklungen analytischer Funktionen (A.86) – (A.95) zu identifizieren und die resultierenden komplizierten Ausdrücke mit zahlreichen nur numerisch zu bestimmenden Integralen mit Hilfe zweier “Basisintegrale” $I1$ und $I2$ (A.96), (A.97) in die einfachere Form (A.106) – (A.115) zu überführen.

Die analytische Lösung hat aber den Nachteil, daß sie für $y \rightarrow 0$ Singularitäten aufweist. Daher wird eine Fallunterscheidung eingeführt:

- $y \geq 2$: Verwendung der analytischen Lösungen (A.106) – (A.115) zur Berechnung der Koeffizienten $l_{j,k}^h$ des Coulomb – Stoßoperators (A.77).
- $y < 2$: Da die analytischen Formeln (A.106) – (A.115) für $y \rightarrow 0$ problematisch werden und die Summation über $(-y)^n/n!$ nur für größere y Probleme mit der Rechengenauigkeit aufweist, kann sie direkt durchgeführt werden. Aufgrund der Unabhängigkeit des Parameters x von der Geschwindigkeit v_{\parallel} brauchen die Koeffizienten b_n nach (A.119) für jede Höhe s_l im Rechenfeld nur einmal pro Zeitschritt berechnet zu werden und können für alle Geschwindigkeiten v_{\parallel} verwendet werden. Die Berechnung der b_n erfordert die Ausführung der Summation über $(-x)^m$.
Die Summen über $(-x)^m$ divergieren für $x \geq 1$, aber es ist auch für sie möglich, analytische Funktionen (A.121) – (A.130) zu finden. Dabei tritt jedoch das Problem auf, daß diese für $x \rightarrow 0$ divergieren. Dadurch wird eine erneute Fallunterscheidung notwendig:

- $x \geq 1$: Verwendung der analytischen Formeln (A.121) – (A.130) zur Berechnung der Summen über $(-x)^m$.
- $x < 1$: Die analytischen Formeln werden nicht verwendet, stattdessen wird eine numerische Summation durchgeführt. Da die Reihen über $(-x)^m$ für $x \rightarrow 1$ nur sehr langsam konvergieren, ist es notwendig, die Konvergenz durch die Umformung (A.133), (A.134) zu beschleunigen.

Die Fallunterscheidung erlaubt es, die Parameter $l_{j,k}^h$ des Coulomb – Stoßoperators $(\frac{\delta F_k}{\delta t})_{Coul.}$ nach (A.77) für alle möglichen Werte der Parameter $x = 2\beta V_{\perp}^2$ und $y = \beta v_{\parallel}^2$ mit hoher Genauigkeit zu berechnen. Damit ist die Entwicklung des in Abschnitt 2.4.2 eingeführten Coulomb – Stoßoperators (2.114) abgeschlossen.

Anhang B

Symbolverzeichnis

Die folgenden Tabellen enthalten die in dieser Arbeit verwendeten Symbole für physikalische Größen und einige mathematische Operatoren. Neben einer kurzen Erläuterung ist bei den meisten Symbolen ein Verweis auf die Definition oder den ersten Gebrauch angegeben. Bei vielen Größen kann zur Kennzeichnung der verschiedenen Ionensorten ein zusätzlicher tiefgestellter Index j hinzugefügt werden, der hier meist nicht aufgeführt ist. Bei einigen Symbolen kann es vorkommen, daß sie in einzelnen Abschnitten der Arbeit andere als die sonst üblichen Größen repräsentieren. Verwechslungen sind dabei ausgeschlossen. Diese zusätzlichen Bedeutungen sind in der Tabelle in Klammern gesetzt.

Lateinisches Alphabet

A	Querschnittsfläche der betrachteten Flußröhre	
A^\pm	Beschleunigungsterm der Welle - Teilchen – Wechselwirkung	Gl. (2.52)
a	Gewicht für Momente bei Coulomb – Stößen	Gl. (3.54)
\vec{B}	Magnetfeld	
B	Betrag des Magnetfeldes	
	(von ∇T abhängiger Koeffizient nach Spitzer und Härm (1953))	(Gl. (4.15))
\mathcal{B}_k^\pm	Spektrale Energiedichte der Wellen (Wellenzahlspektrum)	Kap. 2.3
$\hat{\mathcal{B}}_k^\pm$	\mathcal{B}_k^\pm , normiert auf die Energiedichte des Magnetfeldes	Gl. (2.48)
\mathcal{B}_ω^\pm	Spektrale Energiedichte der Wellen (Frequenzspektrum)	Gl. (2.72)
$\hat{\mathcal{B}}_\omega^\pm$	\mathcal{B}_ω^\pm , normiert auf die Energiedichte des Magnetfeldes	Kap. 2.3
b	Stoßparameter	Abb. 2.2
b_0	Stoßparameter für Ablenkung von 90°	Gl. (2.91)
D	Diffusionsterm der Welle - Teilchen – Wechselwirkung	Gl. (2.51)
$D(x)$	Störungsparameter nach Spitzer und Härm (1953)	Gl. (4.8)
D_r	Realteil der Dispersionsfunktion	Gl. (2.70)
D_i	Imaginärteil der Dispersionsfunktion	Gl. (2.69)
\vec{E}	elektrisches Feld	
E_\parallel	\vec{E} - Komponente in Magnetfeldrichtung	Gl. (2.37)

E	Gesamtenergiedichte	Gl. (4.4)
E_S	Gesamtenergiedichte des Wellenspektrums	Gl. (2.73)
$\vec{e}_{v_{\parallel}}$	Einheitsvektor in Magnetfeldrichtung	Gl. (2.20)
$\vec{e}_{v_{\perp}}$	Einheitsvektor in \vec{v}_{\perp} - Richtung	Gl. (2.20)
\vec{F}_s	Spiegelkraft	Gl. (2.30)
F_k	reduzierte Verteilungsfunktion k -ter Ordnung	Gl. (2.2)
f	Verteilungsfunktion	Gl. (2.1)
\mathcal{F}	spektraler Energietransfer	Gl. (2.72)
G_j	Rosenbluth – Potential beim Coulomb – Stoß mit Ionensorte j	Gl. (2.105)
\vec{g}	Schwerebeschleunigung (Geschwindigkeitsdifferenz beim Coulomb – Stoß)	Gl. (2.1) (Kap. 2.4.1)
$\Delta\vec{g}$	Änderung der Geschwindigkeitsdifferenz durch Coulomb – Stoß	Gl. (2.98)
g	Betrag der Schwerebeschleunigung	Gl. (2.33)
g_{\parallel}	Komponente der Schwerebeschleunigung in Magnetfeldrichtung	Gl. (2.21)
\vec{g}_{\perp}	Komponente der Schwerebeschleunigung senkrecht zur Magnetfeldrichtung	Kap. 2.2.1
g_m	Gewichte im Geschwindigkeitsraum zur Momentenbildung	Gl. (3.4)
H	Heizungsterm der Welle - Teilchen – Wechselwirkung	Gl. (2.53)
H_j	Rosenbluth – Potential beim Coulomb – Stoß mit Ionensorte j	Gl. (2.106)
h_{τ}	Hilfsgröße für die Welle - Teilchen – Wechselwirkung im Fluidmodell	Gl. (3.31)
$I_k[\dots]$	Integraloperator, Integration über alle \vec{v}_{\perp}	Gl. (2.16)
$I_n(x)$	gewichtetes Integral nach Spitzer und Härm (1953)	Gl. (4.16)
\Im	Imaginärteil eines komplexen Ausdrucks	
k	Wellenzahl (Wellenausbreitung parallel zu \vec{B})	Kap. 2.3
k_B	Boltzmann - Konstante	
L_j	Landau – Stoßintegral beim Coulomb – Stoß mit Ionensorte j	Gl. (2.104)
$l_{j,k}^h$	Koeffizienten für Coulomb – Stoßoperator der F_k	Gl. (2.114)
M_j	reduzierte Masse für Coulomb – Stoß mit Ionensorte j	Gl. (2.88)
m	Teilchenmasse	
N	Teilchendichte	Gl. (2.4)
p	Druck (Gesamtimpulsdichte)	(Gl. (4.3))
\vec{q}	Wärmestromvektor	Gl. (2.10)
$q_{\parallel}, (q)$	Wärmestrom in Magnetfeldrichtung	Gl. (2.12)
q	Teilchenladung	
\Re	Realteil eines komplexen Ausdrucks	
s	Ortskoordinate in Magnetfeldrichtung	Kap. 2.2.1
s_l	Stützstelle des Rechenfeldes im Ortsraum	Kap. 3.1
Δs_l	Diskretisierung des Rechenfeldes im Ortsraum	Gl. (3.1)
T	Temperatur	
T_{\parallel}	parallele Temperatur	
T_{\perp}	senkrechte Temperatur	
T_t	Transitzeit einer ballistischen Bahn durch das Rechenfeld	Gl. (4.6)
T_{ω}	Absorptionszeit der Wellen (variables Spektrum)	Gl. (3.45)
t	Zeit	
Δt	Zeitschritt beim numerischen Lösungsverfahren	Kap. 3.2.2

U_m	Schwerpunktsgeschwindigkeit des Plasmas	Kap. 2.3.2
ΔU_m	$v_D - U_m$	Kap. 2.3.2
V_{\parallel}	thermische Geschwindigkeit parallel zum Magnetfeld	Gl. (2.8)
V_{\perp}	thermische Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld	Gl. (2.7)
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor	
\vec{v}_{\perp}	Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld	
v_{\parallel}	Geschwindigkeitskomponente parallel zum Magnetfeld	
v_{\perp}	Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld (Betrag)	
v	Betrag von \vec{v} (Verkürzte Schreibweise für v_{\parallel})	
v_A	Alfvéngeschwindigkeit	Kap. 2.3.2
v_D	Driftgeschwindigkeit	Gl. (2.5)
v_m	Stützstelle des Rechenfeldes im Geschwindigkeitsraum	Kap. 3.1
Δv_m	Diskretisierung des Rechenfeldes im Geschwindigkeitsraum	Kap. 3.1
v_{ph}	Phasengeschwindigkeit der Wellen	Gl. (2.57)
v_{th}	thermische Geschwindigkeit	Gl. (2.9)
Z	mittlere Ladungszahl der Ionen	Gl. (4.17)
z_k	komplexe Kreisfrequenz der Wellen	Kap. 2.3

Griechisches Alphabet

α	Spektralkoeffizient beim Potenzspektrum	Gl. (2.75)
β	Plasma - β	
Γ_j	Vorfaktor für Coulomb – Stöße mit Ionensorte j	Gl. (2.102)
γ	Anwachsrate der Wellen	Gl. (2.71)
ϵ_0	Influenzkonstante	
$\hat{\epsilon}^{\pm}$	Dielektrizitätskonstante des Plasmas	Gl. (2.55)
θ	Pitchwinkel (Ablenkwinkel beim Coulomb – Stoß)	Gl. (4.8) (Abb. 2.2)
κ_0	Konstante zur Berechnung des Wärmestroms	Gl. (3.29)
Λ_j	Coulomb – Logarithmus für Stoß mit Ionensorte j	Gl. (2.112)
λ_D	Debye – Länge	Gl. (2.108)
μ	magnetisches Moment	Gl. (2.26)
μ_0	Induktionskonstante	
ν	klassische Coulomb – Stoßfrequenz	Gl. (3.35)
ρ	Massendichte	
$d\sigma$	differentieller Stoßquerschnitt	Gl. (2.80)
τ	“Stoßzeit” für Welle - Teilchen – Wechselwirkung	Gl. (2.58)
Φ	Fehlerfunktion: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$	Gl. (4.10)
ϕ	Teilchenfluß (Gyrationswinkel)	Gl. (3.22) (Kap. 2.2.1)
ϕ_E	Energiefluß	Gl. (4.5)
χ	Dämpfungsfaktor für Welle - Teilchen – Wechselwirkung	Gl. (3.46) Gl. (3.47) Kap. 2.3.3

ψ	Winkel zwischen Magnetfeldrichtung und der Senkrechten zur Sonnenoberfläche	Abb. 2.1
Ω	Gyrofrequenz	Kap. 2.3
$d\Omega$	Raumwinkelement	Gl. (2.82)
ω	Kreisfrequenz der Wellen	Kap. 2.3
ω_L	Untere Grenzfrequenz beim Ansatz eines starren Spektrums	Kap. 2.3.3

Literaturverzeichnis

- A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, und K. N. Stepanov. *Plasma Electrodynamics. Non-Linear Theory and Fluctuations*, volume 2. Pergamon Press, Oxford, 1975. 23
- Stephen W. Anderson. Coulomb collisions and coronal heating by velocity filtration. *Astrophys. J.*, 437:860–866, 1994. 10
- Stephen W. Anderson, John C. Raymond, und Adriaan van Ballegooijen. Ultraviolet emission-line intensities and coronal heating by velocity filtration: Collisionless results. *Astrophys. J.*, 457:939–948, 1996. 10
- W. I. Axford und J. F. McKenzie. The origin of high speed solar wind streams. In E. Marsch und R. Schwenn, editors, *Solar Wind Seven*. Pergamon Press, Sep 1991. 8
- W. I. Axford, J. F. McKenzie, und G. V. Sukhorukova. Acceleration of the high speed solar wind in coronal holes. *Space Science Rev.*, 87:24–41, 1999. 3, 9
- Wolfgang Baumjohann und Rudolf A. Treumann. *Basic Space Plasma Physics*. Imperial College Press, London, 1996. 29, 54, 59
- Jacques M. Beckers und Eric Chapman. The profile and polarization of the coronal $L\alpha$ line. *Solar Phys.*, 34:151–161, 1974. 6
- L. Biermann. Kometenschweife und solare Korpuskularstrahlung. *Z. Astrophys.*, 29:274–286, 1951. 2
- Robert S. Cohen, Lyman Spitzer, und Paul McR. Routly. The electrical conductivity of an ionized gas. *Phys. Rev.*, 80:230–238, 1950. 88, 89, 90
- Steven R. Cranmer. Ion cyclotron wave dissipation in the solar corona: The summed effect of more than 2000 ion species. *Astrophys. J.*, 532:1197–1208, 2000. 32, 141, 151
- Steven R. Cranmer, George B. Field, und John L. Kohl. Spectroscopic constraints on models of ion cyclotron resonance heating in the polar solar corona and high-speed solar wind. *Astrophys. J.*, 518:937–947, 1999. 8
- Ronald C. Davidson. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Academic Press, New York, 1972. 23, 25

- J.-P. Delaboudinière, G.E. Artzner, J. Brunaud, A.H. Gabriel, J.F. Hochedez, F. Millier, X.Y. Song, B. Au, K.P. Dere, R.A. Howard, R. Kreplin, D.J. Michels, J.D. Moses, J.M. Defise, C. Jamar, P. Rochus, J.P. Chauvineau, J.P. Marioge, R.C. Catura, J.R. Lemen, L. Shing, R.A. Stern, J.B. Gurman, W.M. Neupert, A. Maucherat, F. Clette, P. Cugnon, und E.L. van Dessel. Eit: Extreme-ultraviolet imaging telescope for the soho mission. *Solar Phys.*, 162: 291–312, 1995. 6
- G. A. Doschek. Emission measures and electron densities for the solar transition region. *Astrophys. J.*, 476:903–917, 1997. 4
- G. A. Doschek, J. T. Mariska, H. P. Warren, K. Wilhelm, P. Lemaire, T. Kucera, und U. Schühle. Determination of the formation temperature of Si IV in the solar transition region. *Astrophys. J.*, 477:L119–L122, 1997. 8
- James F. Dowdy, Douglas Rabin, und Ronald L. Moore. On the magnetic structure of the quiet transition region. *Solar Phys.*, 105:35–45, 1986. 4, 4, 4
- C. T. Dum, E. Marsch, und W. Pilipp. Determination of wave growth from measured distribution functions and transport theory. *J. Plasma Phys.*, 23:91–113, 1980. 26
- Ruth Esser und Richard J. Edgar. Reconciling spectroscopic electron temperature measurements in the solar corona with in situ charge state observations. *Astrophys. J.*, 532:L71–L74, 2000. 8
- Bernhard Fleck, Vicente Domingo, und Arthur I. Poland, editors. *The SOHO Mission*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995. 6
- A. H. Gabriel. A magnetic model of the solar transition region. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 281:339–352, 1976. 4, 4, 99
- S. Peter Gary, Michael. E. McKean, Dan Winske, Brian J. Anderson, Richard E. Denton, und Stephen A. Fuselier. The proton cyclotron instability and the anisotropy/ β inverse correlation. *J. Geophys. Res.*, 99:5903–5914, 1994. 140, 140, 141, 141
- S. Peter Gary, Joseph Wang, Dan Winske, und Stephen A. Fuselier. Proton temperature anisotropy upper bound. *J. Geophys. Res.*, 102:27159–27169, 1997. 140, 140, 141, 141
- S. Giordano, E. Antonucci, G. Noci, M. Romoli, und J. L. Kohl. Identification of the coronal sources of the fast solar wind. *Astrophys. J.*, 531:L79–L82, 2000. 5
- P. Hackenberg, G. Mann, und E. Marsch. Plasma properties in coronal funnels. *Space Science Rev.*, 87:207–210, 1999. 22, 82, 100
- Viggo H. Hansteen und Egil Leer. Coronal heating, densities, and temperatures and solar wind acceleration. *J. Geophys. Res.*, 100:21577–21593, 1995. 9
- R.A. Harrison, E.C. Sawyer, M.K. Carter, A.M. Cruise, R.M. Cutler, A. Fludra, R.W. Hayes and B.J. Kent, J. Lang, D.J. Parker, J. Payne, C.D. Pike, S.C. Peskett, A.G. Richards, J.L. Culhane, K. Norman, A.A. Breeveld, E.R. Breeveld, K.F. Al Janabi, A.J. McCalden, J.H. Parkinson, D.G. Self, P.D. Thomas, A.I. Poland, R.J. Thomas, W.T. Thompson, O. Kjeldseth-Moe and P. Brekke, J. Karud, P. Maltby, B. Aschenbach, H. Bräuninger,

- M. Kühne, J. Hollandt, O.H.W. Siegmund, M.C.E. Huber, A.H. Gabriel, H.E. Mason, und B.J.I. Bromage. The coronal diagnostic spectrometer for the solar and heliospheric observatory. *Solar Phys.*, 162:233–290, 1995. 6
- Donald M. Hassler, Ingolf E. Dammasch, Philippe Lemaire, Paal Brekke, Werner Curdt, Helen E. Mason, Jean-Claude Vial, und Klaus Wilhelm. Solar wind outflow and the chromospheric magnetic network. *Science*, 283,5403:211–246, 1999. 6, 7
- Y. Q. Hu, R. Esser, und S. R. Habbal. A fast solar wind model with anisotropic proton temperature. *J. Geophys. Res.*, 102:14661–14676, 1997. 9, 54, 55, 56, 100
- You Qiu Hu, Ruth Esser, und Shadia R. Habbal. A four-fluid turbulence-driven solar wind model for preferential acceleration and heating of heavy ions. *J. Geophys. Res.*, 105:5093–5111, 2000. 9
- J. D. Huba. Theory and simulation of a high-frequency magnetic drift wave. *Phys. Fluids B*, 3(12):3217–3225, 1991. 10
- S. A. Jacques. Solar wind models with Alfvén waves. *Astrophys. J.*, 226:632–649, 1978. 11
- Philip Judge, Mats Carlsson, und Klaus Wilhelm. SUMER observations of the quiet solar atmosphere: The network chromosphere and lower transition region. *Astrophys. J.*, 490: L195–L198, 1997. 8
- F. Kneer. On time-dependent ionization in stellar chromospheres. *Astron. Astrophys.*, 87: 229–235, 1980. 8
- Yuan-Kuen Ko, Lennard A. Fisk, Johannes Geiss, George Gloeckler, und Madhulika Guhathakurta. An empirical study of the electron temperature and heavy ion velocities in the south polar coronal hole. *Solar Phys.*, 171:345–361, 1997. 8
- J.L. Kohl, R. Esser, L.D. Gardner, S. Habbal, P.S. Daigneau, E.F. Dennis, G.U. Nystrom, A. Panasyuk, J.C. Raymond, P.L. Smith, L. Strachan, A.A. van Ballegooijen, G. Noci, S. Fineschi, M. Romoli, A. Ciaravella, A. Modigliani, M.C.E. Huber, E. Antonucci, C. Benna, S. Giordano, G. Tondello, P. Nicolosi, G. Naletto, C. Pernechele, D. Sparado, G. Poletto, S. Livi, O. von der Lühe, J. Geiss, J.G. Timothy, G. Gloeckler, A. Allegra, G. Basile, R. Brusa, B. Wood, O.H.W. Siegmund, W. Fowler, R. Fisher, und M. Jhabvala. The ultraviolet coronagraph spectrometer for the solar and heliospheric observatory. *Solar Phys.*, 162:313–356, 1995. 6
- J.L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M.C.E. Huber, R. Cranmer, L. Strachan, A. V. Panasyuk, L.D. Gardner, M. Romollo, S. Fineschi, D. Dobrzycka, J.C. Raymond, P. Nicolosi, O.H.W. Siegmund, D. Sparado, C. Benna, A. Ciaravella, S. Giordano, S.R. Habbal, M. Karovska, X. Li, R. Martin, J.G. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, R.H. O’Neal, C. Pernechele, G. Poletto, P.L. Smith, und R.M. Suleiman. UVCS/SOHO empirical determinations of anisotropic velocity distributions in the solar corona. *Astrophys. J.*, 501:L121–L131, 1998. 8, 115, 125, 133
- Egil Leer, Øystein Lie-Svendsen, Espen Lyngdal Olsen, und Viggo H. Hansteen. Outflow of He^+ from the polar ionosphere: Comparison of hydrodynamic and kinetic descriptions. *J. Geophys. Res.*, 101:17207–17216, 1996. 10

- Øystein Lie-Svendsen, Viggo H. Hansteen, und Egil Leer. Kinetic electrons in high-speed solar wind streams: Formation of high-energy tails. *J. Geophys. Res.*, 102:4701–4718, 1997. 10
- S. Livi und E. Marsch. Generation of solar wind proton tails and double beams by coulomb collisions. *J. Geophys. Res.*, 92:7255–7261, 1987. 10
- N. N. Ljepojevic und A. Burgess. Calculation of the electron velocity distribution function in a plasma slab with large temperature and density gradient. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 428:71–111, 1990. 33, 37
- John T. Mariska. *The Solar Transition Region*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. 2, 3, 5, 7, 151
- E. Marsch. Closure of multi-fluid and kinetic equations for cyclotron-resonant interactions of solar wind ions with Alfvén waves. *Nonlinear Proc. in Geophys.*, 5:111–120, 1998. 14, 16, 25, 25, 27
- E. Marsch. Dissipation and wave-ion interaction in the solar wind. links between fluid and kinetic theory. *Nonlinear Proc. in Geophys.*, 6:149–160, 1999. 9
- E. Marsch und H. Goldstein. The effects of coulomb collisions on solar wind ion velocity distributions. *J. Geophys. Res.*, 88:9933–9940, 1983. 131
- E. Marsch, K.-H. Mühlhäuser, R. Schwenn, H. Rosenbauer, W. Pilipp, und F. M. Neubauer. Solar wind protons: Three-dimensional velocity distributions and derived plasma parameters measured between 0.3 and 1 AU. *J. Geophys. Res.*, 87:52–72, 1982. 130, 130, 144
- E. Marsch und C.-Y. Tu. The effects of high-frequency Alfvén waves on coronal heating and solar wind acceleration. *Astron. Astrophys.*, 319:L17–L20, 1997. 9, 112
- E. Marsch, C.-Y. Tu, P. Heinzel, K. Wilhelm, und W. Curdt. Proton and hydrogen temperatures at the base of the solar polar corona. *Astron. Astrophys.*, 347:676–683, 1999. 6, 8
- D. C. Montgomery und D. A. Tidman. *Plasma Kinetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1964. 33, 33, 37
- S. Patsourakos, J.-C. Vial, A. H. Gabriel, und N. Bellamine. Transition-region network boundaries in the quiet sun: Width variation with temperature as observed with CDS on SOHO. *Astrophys. J.*, 522:540–546, 1999. 4
- Alexander Ruzmaikin und Mitchell A. Berger. On a source of Alfvén waves heating the solar corona. *Astron. Astrophys.*, 337:L9–L12, 1998. 9
- H. Scheffler und H. Elsässer. *Physik der Sterne und der Sonne*. BI – Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990. 6
- R. Schwenn und E. Marsch. *Physics of the inner Heliosphere*, volume II. Springer, Berlin, 1991. 130
- Jack D. Scudder. On the cause of temperature change in inhomogeneous low - density astrophysical plasmas. *Astrophys. J.*, 398:299–318, 1992a. 10

- Jack D. Scudder. Why all stars should possess circumstellar temperature inversions. *Astrophys. J.*, 398:319–349, 1992b. 10
- Edward C. Shoub. Invalidity of local thermodynamic equilibrium for electrons in the solar transition region. I. Fokker-Planck results. *Astrophys. J.*, 266:339–369, 1983. 8
- Edward C. Shoub. Kinetic theory of solar wind acceleration. In V. J. Pizzo, T. Holzer, and D. G. Sime, editors, *Proceedings of the Sixth International Solar Wind Conference*, pages 59–85. High Altitude Observatory of the National Center for Atmospheric Research, Aug 1987. 10
- J. M. Shull und M. van Steenberg. Erratum – the ionization equilibrium of astrophysically abundant elements. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 49:351, 1982a. 6
- J. M. Shull und M. van Steenberg. The ionization equilibrium of astrophysically abundant elements. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 48:95–107, 1982b. 6
- D. Sparado, P. Leto, und S. K. Antiochos. Observational tests for nonequilibrium ionization in the solar corona. *Astrophys. J.*, 427:453–458, 1994. 8
- D. Sparado, S. Orlando, und P. Leto. Effects of flows and non-equilibrium ionization on some C IV line ratios on the sun. *Astron. Astrophys.*, 302:285–289, 1995. 8
- Lyman Spitzer. *Physics of Fully Ionized Gases*. Interscience, New York, 1962. 9
- Lyman Spitzer und Richard Härm. Transport phenomena in a completely ionized gas. *Phys. Rev.*, 89:977–981, 1953. 71, 88, 89, 89, 90, 93, 96, 162, 199, 199, 200
- Sunny W.Y. Tam und Tom Chang. Kinetic evolution and acceleration of solar wind. *Geophys. Res. Lett.*, 26:3189–3192, 1999. 10
- Eleuterio F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997. 53
- C.-Y. Tu und E. Marsch. Comment on “Evolution of energy-containing turbulent eddies in the solar wind” by W.H. Matthaeus, S. Oughton, D.H. Pontius jr., and Y. Zhou. *J. Geophys. Res.*, 100:12323–12328, 1995. 9
- C.-Y. Tu und E. Marsch. Two-fluid model for heating of the solar corona and acceleration of the solar wind by high-frequency Alfvén waves. *Solar Phys.*, 171:363–391, 1997. 30
- C.-Y. Tu und E. Marsch. Cyclotron wave heating and acceleration of solar wind ions in the corona. *J. Geophys. Res.*, in print, 2001. 32, 125
- C.-Y. Tu, E. Marsch, K. Wilhelm, und W. Curdt. Ion temperatures in a solar polar coronal hole observed by SUMER on SOHO. *Astrophys. J.*, 503:475–482, 1998. 6
- J. E. Vernazza, E. H. Avrett, und R. Loeser. Structure of the solar chromosphere. III. Models of the EUV brightness components of the quiet sun. *Astrophys. J.*, 45:635–725, 1981. 3
- Jorge E. Vernazza, Eugene H. Avrett, und Rudolf Loeser. Structure of the solar chromosphere. I. Basic computations and summary of the results. *Astrophys. J.*, 184:605–631, 1973. 2, 2

K. Wilhelm, W. Curdt, E. Marsch, U. Schühle, P. Lemaire, A. Gabriel, J.-C. Vial, M. Grewing, M.C.E. Huber, S.D. Jordan, A.I. Poland, R.J. Thomas, M. Kühne, J.G. Timothy, D.M. Hassler, und O.H.W. Siegmund. SUMER - solar ultraviolet measurements of emitted radiation. *Solar Phys.*, 162:189–231, 1995. 6

Jack B. Zirker, editor. *Coronal Holes and High Speed Solar Wind Streams*. Colorado Associated University Press, Boulder, Colorado, 1977. 5

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Max-Planck-Institut für Aeronomie in Katlenburg-Lindau angefertigt. Den Direktoren des Instituts danke ich für die Bereitstellung des Arbeitsplatzes und für die Gewährung eines Stipendiums.

Herrn Prof. Dr. E. Marsch danke ich für die Betreuung der Arbeit, die Aufgabenstellung, bei deren Wahl er mir viele Freiheiten gelassen hat, und für die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen, für die er sich stets viel Zeit genommen hat.

Herrn Prof. Dr. K.-H. Glaßmeier danke ich für die Betreuung der Arbeit seitens der TU Braunschweig, den Kontakt zum MP Ae und für sein stetes Interesse an den Ergebnissen der Arbeit.

Herrn Dr. B. Inhester danke ich für zahlreiche erhellende Diskussionen, speziell über Fragen des numerischen Verfahrens.

Den Herren Drs. C. Seele, K. Ivory, A. Lagg und M. Bantin möchte ich für ihre vielfältige Unterstützung beim Umgang mit dem Betriebssystem LINUX danken, die mir besonders in der Anfangsphase eine große Hilfe war.

Abschließend danke ich der “Kaffeerunde” (Arbeitsgruppe 10:23 Uhr), die mit Diskussionen über physikalische und nicht-physikalische Themen eine angenehme Abwechslung in den Arbeitstag brachte.

Lebenslauf

Geburt	Am 23.09.1970 in Porz am Rhein
Schulbildung	1977 – 1981: Overbergschule Lingen 1981 – 1983: Orientierungsstufe Lingen - Laxten 1983 – 1990: Franziskusgymnasium Lingen Abitur im Mai 1990
Wehrdienst	01.07.1990 – 30.06.1991
Studium	10/1991 - 11/1997: Studium der Physik an der TU Carolo - Wilhelmina zu Braunschweig Vordiplom 10/1993 11/1997: Abschluß mit Diplom Diplomarbeitsthema: "Ein Modenfilter für Plasmawellen in der Hall - MHD – Näherung" 12/1997 – 02/1998: Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Geophysik und Meteorologie der TU Braunschweig Seit 03/1998: Stipendiat am Max - Planck – Institut für Aeronomie in Katlenburg - Lindau

Veröffentlichungen

Vocks, C., U. Motschmann und K.-H. Glassmeier, A Mode Filter for Plasma Waves in the Hall-MHD Approximation, *Ann. Geophys.*, 17, 712-722, 1999.

Glassmeier, K.-H., G. Musmann, C. Vocks und M. Menvielle, Mars - A Planet in Magnetic Transition?, *NetLander Workshop*, CNES Headquarters, November 18-19, 1998.

Tagungsbeiträge

Vocks, C., U. Motschmann und K.-H. Glassmeier, Ein Modenfilter für Plasmawellen in der Hall-MHD – Näherung, DPG/AEF, München, 1997.

Vocks, C., U. Motschmann und K.-H. Glassmeier, A Mode Filter for Plasma Waves in the Hall-MHD Approximation, IAGA, Uppsala, 1997.